

# Stellungnahme zum Bericht

*“Analyse alternativer Verfahren zur  
Berechnung des Konjunkturfaktors”*

Klaus Neusser\*

3. April 2021

---

\*Prof.em Dr. Klaus Neusser, Emeritus Volkswirtschaftliches Institut, Universität Bern  
Adresse: Eggenstrasse 1, A-3730 Eggenburg, Österreich  
Email: [klaus.neusser@vwi.unibe.ch](mailto:klaus.neusser@vwi.unibe.ch)

## Zusammenfassung

Ausgehend vom Bericht von Schmassmann, Bruchez und Wiedmer [24] (SBW-Bericht) werden in diesem Gutachten verschiedene Verfahren zur Trendextraktion vor dem Hintergrund der wirtschaftlichen Verwerfungen als Folge der Covid-19-Pandemie untersucht und evaluiert. Dabei erweisen sich die Untersuchungen im SBW-Bericht als sehr nützlich und aufschlussreich, da sie eine Fülle unterschiedlichster Verfahren im Hinblick auf ihre praktische Relevanz evaluieren. Dabei liegt der Schwerpunkt auf Simulationen, wobei theoretische Argumente etwas zu kurz kommen. Aus diesem Grund versucht die Stellungnahme die untersuchten Methoden theoretisch einzuordnen und Verbesserungsmöglichkeiten auszuarbeiten.

Diese theoretischen Überlegungen zusammen mit den Ergebnissen des SBW-Berichts lassen folgenden Schluss zu. “Einfache” Filterverfahren, unter Umständen modifiziert um den end-point Bias zu reduzieren, schneiden grundsätzlich am besten ab. Insbesondere schneidet die derzeitig praktizierte Vorgangsweise (mHP(100)) besonders gut ab. Trotzdem wäre es lohnenswert weitere Modifikationen des HP-Filters in Betracht zu ziehen (siehe Gleichung (2.5)), um insbesondere die gegenwärtige Situation besser einzufangen. Die multivariaten Zustandsraummodelle kommen im SBW-Bericht überraschend schlecht weg. Hier wäre zu untersuchen, ob die Erweiterung um eine irreguläre Komponente die Performanz dieser Modellklasse verbessert. Eine im SBW-Bericht nur ansatzweise betrachtete Methode ist die in vielen statistischen Anwendungen populäre lokale polynomiale Kernregression. Die Methode würde eine vertiefte Evaluierung verdienen, zumal die derzeit praktizierte rekursive Anwendung der verschiedenen Filterähnlichkeiten mit dieser Methode aufweist.

Alles in allem hat der SBW-Bericht das Vertrauen in die derzeitige Praxis gestärkt. Die wahrgenommene Unzulänglichkeit im Zusammenhang mit der Covid-19-Pandemie sollte nicht Anlass geben, neue Verfahren zu implementieren, die diese subjektive Einschätzung akkommodiert. Vielmehr könnte das derzeitige Verfahren in einer transparenten Weise modifiziert werden (siehe Gleichung (2.5)), um diesem singulären Ereignis Rechnung zu tragen.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Ausgangspunkt und generelle Bemerkungen</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Filterverfahren</b>	<b>5</b>
2.1	Der HP-Filter . . . . .	6
2.1.1	Glättung . . . . .	7
2.1.2	Tiefpass-Filter . . . . .	11
2.1.3	Zustandsraummodell . . . . .	13
2.2	Lokale polynomiale Kernregression . . . . .	15
2.3	Multivariate Filter . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Modellbasierte Verfahren</b>	<b>19</b>
<b>4</b>	<b>Evaluation des Berichts</b>	<b>21</b>
<b>5</b>	<b>Vorschläge und Anregungen</b>	<b>26</b>
<b>A</b>	<b>Stationarität der zyklischen Komponente</b>	<b>28</b>

# 1 Ausgangspunkt und generelle Bemerkungen

Die kurz- wie langfristigen wirtschaftlichen Verwerfungen der Covid-19-Pandemie sind derzeit noch nicht klar absehbar. Trotzdem ist für die Erstellung des Finanzplans bis 2024 eine profunde Einschätzung der zukünftigen wirtschaftlichen Entwicklung, hier gemessen am realen BIP, unerlässlich. Diese grosse Unsicherheit überträgt sich verstärkt auf die Schätzung des Produktionspotentials oder *Trend-BIP's*, das über den sogenannten Konjunkturfaktor oder kurz *k*-Faktor den Ausgabenrahmen im Finanzplan vorgibt. Das Trend-BIP ist allerdings nicht beobachtbar und kann nur indirekt mittels eines statistischen Modells geschätzt werden. Da das Trend-BIP das Ergebnis einer Schätzung ist und von der vorliegenden Stichprobe abhängt, ist es eine Zufallsgrösse und damit mit Unsicherheit behaftet. Diese Unsicherheit wird in der gegenwärtigen Situation als besonders gross empfunden, so dass eine Evaluation der derzeitig praktizierten Methode, aber auch alternativer Verfahren angebracht erscheint.

Der ausführliche Bericht von Schmassmann, Bruchez und Wiedmer [24] (SBW-Bericht) führt eine Bewertung gemäss einiger vorgegebener Kriterien einer Vielzahl von gängigen aber auch speziell für diesen Anlass entwickelter Verfahren zur Trendextraktion durch. Er wird in Abschnitt 4 explizit gewürdigt.

Da der SBW-Bericht hauptsächlich auf Simulationsergebnissen beruht und kaum Einblick in die theoretischen statistischen Grundlagen der besprochenen Verfahren bietet, erschien es mir angebracht zu sein, eine Synopsis der verschiedenen Methoden zu verfassen. Dies erlaubt, die im SBW-Bericht betrachteten Verfahren einzuordnen, und trägt so zum besseren Verständnis von deren Stärken bzw. Schwächen bei. Weiters können so Verbesserungsvorschläge und alternative Methoden in einem einheitlichen Rahmen angeführt und Querverweise zum SBW-Bericht gezogen werden.

Im Prinzip können zwei Klassen von Modellen zur Trendextraktion unterschieden werden. Die erste Klasse ist rein statistisch motiviert und sieht das Trend-BIP als eine mehr oder weniger glatte Kurve, um die das aktuelle BIP schwankt, an.<sup>1</sup> Diese Sichtweise hat zur Konstruktion und Anwendung verschiedenster uni- oder multivariater Filtertechniken geführt, wovon der univariate Hodrick-Prescott-Filter (HP-Filter) in der Ökonomie, trotz vieler Bedenken, nach wie vor am populärsten ist. Das Ausmass der Glättung wird dabei *subjektiv* durch wenige Hyperparameter, im Fall des HP-Filters durch nur einen einzigen Parameter, dem sogenannte  $\lambda$ , bestimmt. Manche dieser

---

<sup>1</sup>Basu und Fernald vertreten in [2] und weiteren Aufsätzen die gegenteilige Meinung, dass das Produktionspotential auch kurzfristig stark schwankt.

Filter, insbesondere aber der HP-Filter, berechnen, zumindest in der Theorie, den aktuellen Wert des Trend-BIP's als gewichtete Summe der unendlichen Vergangenheit und der unendlichen Zukunft des BIP's. Wegen der Symmetrie werden Vergangenheit und Zukunft dabei gleich gewichtet. Bei endlicher Stichprobe muss sich diese Berechnung auf eine gewichtete Summe aus nur endlich vielen Werten beschränken, der Filter wird also abgeschnitten. Die Konsequenz dieser Vorgangsweise ist, dass es am aktuellen Rand zu groben Verzerrungen kommen kann, da ja die in der Zukunft liegenden Werte aktuell nicht bekannt sind. Um dieses als "end-point-bias" bekannte Problem zu mildern, werden die unbekannt zukünftigen Werte durch Prognosen ersetzt. Im Eidgenössischen Finanzdepartement (EFD) hat man einen anderen Weg gewählt und den HP-Filter so modifiziert, dass der jüngsten Beobachtungen ein geringeres Gewicht beigemessen wird (siehe Bruchez [4]).

Die zweite Klasse von Modellen ist ökonomisch motiviert und interpretiert das Trend-BIP als Produktionspotential ("potential output"), definiert als den maximalen Wert des BIP's, der mittel- bis langfristig mit den vorhandenen Produktionsfaktoren (im Wesentlichen Kapital und Arbeit) und der verfügbaren Technologie nachhaltig erzielbar ist. Dabei bezieht sich nachhaltig vor allem auf den Faktor Arbeit. Neben einer Vielzahl von Messproblemen, auf die in Abschnitt 3 noch näher eingegangen wird, stellt sich bei einer ökonomischen Vorgangsweise die Frage nach der Aufteilung der Ursachen der Konjunkturschwankungen in nachfrage- und angebotsseitige Faktoren. Letztere haben langfristige Auswirkungen und verändern daher das Produktionspotential nachhaltig.

Diese prinzipielle Einschätzung wird im Zuge des wirtschaftlichen Einbruchs als Folge der Covid-19-Pandemie besonders virulent. Im Prinzip kann man zwei Extrempositionen einnehmen. Die erste Position geht davon aus, dass der Kapitalstock und die verfügbare Technologie durch die Massnahmen zur Eindämmung der Pandemie nicht berührt werden. Auch bleibt das Arbeitskräftepotential im Wesentlichen unverändert, auch wenn ein signifikanter Teil in Kurzarbeit ist. Unter diesen Annahmen bleibt das Produktionspotential erhalten und entwickelt sich so weiter als wäre die Pandemie nicht gewesen. Wenn dann die Eindämmungsmassnahmen sukzessive zurückgefahren werden, werden die verfügbaren Ressourcen wieder voll eingesetzt. Die zweite Position argumentiert, dass aufgrund der Eindämmungsmassnahmen gewisse Ressourcen nicht zur Verfügung stehen (Betriebe müssen schliessen, Arbeiter müssen in Quarantäne, etc.), so dass das Produktionspotential stark nach unten revidiert werden muss. Im Extremfall sogar auf null wie z.B. im Fall geschlossener Gastronomiebetriebe. Die Corona-Pandemie wirkt daher wie ein massiver negativer Angebotschock, der das Produktionspotential nach unten drückt. Zwar wird auch bei dieser Position die Wirtschaft

bei abflauernder Pandemie wieder hochgefahren, doch ist zu vermuten, dass es zu bleibenden mittel- bis langfristigen Auswirkungen kommt. Einmal geschlossene oder in Insolvenz gegangene Betriebe können nicht einfach wieder hochgefahren werden. Auch kommt es durch die Pandemie zu einer Reduktion bzw. Verschiebung von Investitionen, sowohl in physisches Kapital wie in Humankapital. Auf der anderen Seite könnten auch positive Effekte zum Tragen kommen (z.B. ein Schub in der Digitalisierung, neue Arbeitsformen, eine Bereinigung im Unternehmenbereich (“cleansing effect”)). In einem Bulletin der EZB [8] werden diesbezüglich verschiedene Kanäle und Auswirkungen besprochen und, soweit möglich, empirisch evaluiert.

Da bis jetzt noch zu wenige Daten vorhanden sind und die Pandemie ein singuläres Ereignis darstellt, kann nur *subjektiv* und aufgrund beschränkter empirischer Evidenz über den Stellenwert der beiden Positionen entschieden werden. Da beide Positionen vertretbar sind, wird die “Wahrheit” irgendwo in der Mitte liegen. Abbildung 1.1 ist aus dem letzten Report des Staatssekretariat für Wirtschaft (seco) über die Konjunkturtendenzen [26] übernommen. Sie zeigt verschiedene Prognosen und Szenarien. In diese Abbildung habe ich völlig arbiträr und ohne Präjudiz den Verlauf des Trend-BIP’s (grüne Linie) eingezeichnet. Die Trend-Linie ist dabei so eingezeichnet, dass der Einbruch im Jahr 2020 das Trend-BIP langfristig etwa um die Hälfte nach unten verschiebt.

Vergleichen wir nun die Szenarien 1 und 2. In Szenario 1 kommt es zu einer sehr raschen Erholung der Wirtschaft, so dass das BIP schon Mitte 2021 über dem Trend zu liegen kommt. Die Wirtschaft würde also in eine Boomphase eintreten. Der k-Faktor wäre somit kleiner als eins und der Ausgabenplafond müsste stark eingeschränkt werden, um einen Überschuss im Budget zu erreichen. In Szenario 2 hingegen bleibt das BIP mittelfristig unterhalb des Trends. Die Wirtschaft befände sich demnach in einer Rezession und der k-Faktor wäre grösser als eins. Der Ausgabenplafond könnte daher angehoben werden, um die Wirtschaft zu stimulieren.

Dieses Gedankenexperiment demonstriert, wie wichtig eine genaue Schätzung des Trend-BIP’s ist.<sup>2</sup> Da die Pandemie ein *einmaliges* Ereignis ist, kann auf keine Erfahrung zurückgegriffen werden. Trotzdem bestehen (berechtigte) Zweifel, dass die bisher zur Anwendung gelangte Methode des modifizierten HP-Filters, das Trend-BIP zu tief ansetzt und so dem Szenario 1 näher kommt (siehe z.B. SBW-Bericht [24, S. 62, Absatz 2]). Dieser nicht näher begründete Zweifel bildet Ausgangspunkt und zugleich Motivation, ei-

---

<sup>2</sup>Orphanides et al. [21] und Orphanides und van Norden [22] haben für die US-Wirtschaft aufgezeigt, wie die Fehleinschätzung der Produktionslücke in den 1970er-Jahren zu falschen wirtschaftspolitischen (geldpolitischen) Entscheidungen geführt hat.

Abbildung 38: BIP-Prognose und Szenarien, Niveau<sup>16</sup>

In Mrd. Franken, real, saison- und Sportevent-bereinigt

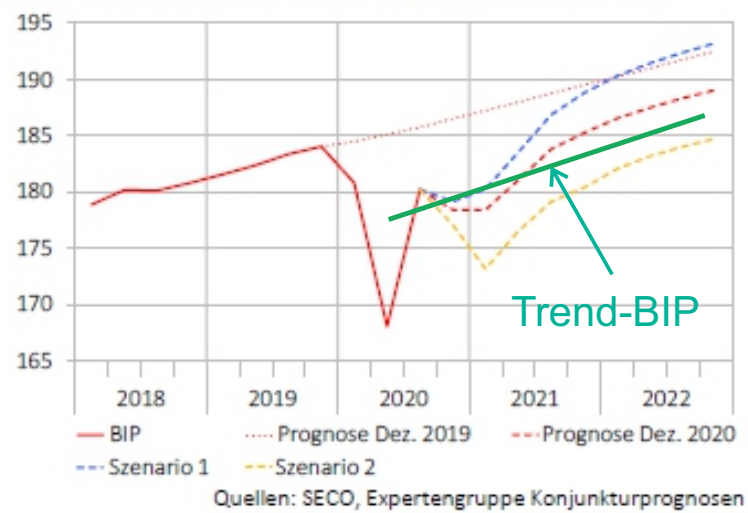


Abbildung 1.1: Szenarien und Trend-BIP

ne Vielzahl alternativer Methoden und Parametrisierungen zu untersuchen, in der Hoffnung ein Verfahren zu entdecken, das diese Skepsis und die damit verbundene Unsicherheit ausräumen kann. Es bleibt aber, welche Methode man auch immer anwendet, ein beträchtlicher diskretionärer Ermessensspielraum. Diese Beliebigkeit sollte nicht durch die scheinbar objektive Auswahl des Verfahrens verdeckt werden, sondern offengelegt werden. Dies umso mehr als alle Verfahren anhand des selben, vom statistischen Standpunkt aus, äusserst kurzen Beobachtungszeitraums “getestet” werden.

Das Gutachten setzt in Abschnitt 2 mit einer kurzen Darstellung wichtiger Filterverfahren fort. Dabei wird dem HP-Filter besonderes Augenmerk geschenkt, da er die Grundlage der derzeit praktizierten Vorgangsweise bildet. Obwohl einzelne Verfahren auch im SBW-Bericht bereits dargestellt sind, scheint es mir nützlich, nochmals auf die methodischen Grundlagen hervorzuheben. Dies erlaubt eine in sich abgeschlossene Behandlung des Themas und eine kohärente Diskussion von Verbesserungsvorschlägen. Anschliessend bespricht Abschnitt 3 ökonomisch motivierte Verfahren. Der SBW-Bericht wird in Abschnitt 4 gewürdigt. Schliesslich werden in Abschnitt 5 einige Schlussfolgerungen gezogen und Anregungen für eine Weiterentwicklung der derzeitigen Vorgangsweise vorgeschlagen. Da im Rahmen der vorliegenden Stellungnahme keine eigenen Berechnungen durchgeführt wurden, müssen die Verbesserungsvorschläge erst auf ihre Praxistauglichkeit überprüft werden.

## 2 Filterverfahren

Filterverfahren, ob uni- oder multivariat, bilden den klassischen Rahmen, um aus den beobachteten (direkt messbaren) Zeitreihen (z.B. das BIP) etwas über den Verlauf des nicht-beobachtbaren Zustands der Wirtschaft (z.B. der Produktionslücke) zu erfahren – gleich einem Arzt, der über Blutdruck- und Fiebermessung den inneren Zustand des Patienten ergründen muss. Damit diese Verfahren erfolgreich sein können, braucht es sowohl eine Vorstellung, wie die Messungen mit dem Zustand zusammenhängen, als auch über innere Dynamik des Zustands. Beides muss explizit oder implizit a priori vorgegeben werden. Vor diesem Hintergrund haben sich eine Vielzahl von Filterverfahren und Modelle in der ökonomischen Forschung wie in der praktischen Wirtschaftspolitik etabliert. Einen Überblick mit Erläuterungen der in der Ökonomie gebräuchlichsten Verfahren gibt der Report des EU Independent Fiscal Institutions [7] (siehe auch Tabelle 1 im SBW-Bericht).

Dieser Abschnitt widmet sich den Filterverfahren allgemein, wobei dem populären HP-Filter und seinen Interpretationen besonderes Augenmerk gilt. Es werden aber auch multivariate Ansätze sowie die lokale polynomiale Kern-



regression als wichtige Alternative besprochen. Die eher ökonomischen auf einer Produktionsfunktion basierenden Ansätze werden dann in Abschnitt 3 dargestellt.

In den folgenden Ausführungen bezeichnet  $Y_t$  den Logarithmus des realen Bruttoinlandsprodukts (BIP),  $Y_t = \log \text{BIP}_t$  und  $T_t$  dessen Trend (Trend-BIP) bzw. in dessen ökonomischer Interpretation das logarithmierte Produktionspotential (“potential output”). Wie im SBW-Bericht werden somit alle Methoden auf die Zeitreihe  $\log \text{BIP}_t$  angewendet.<sup>3</sup> Die Differenz  $C_t = Y_t - T_t = \log(\text{BIP}_t) - T_t$  definiert dann die Produktionslücke (“output gap”) als *prozentuelle* Abweichung des BIP von seinem Trend. Die Produktionslücke wird oft als absolute Abweichung definiert. Dies scheint mir in Anbetracht der Definition des k-Faktors als Verhältnis des Trend-BIPs zum aktuellen BIP nicht angebracht zu sein.<sup>4</sup> Die Beobachtungen werden von eins bis  $T$  durchnummeriert. Der Zeitpunkt  $T$  stellt dabei die letzte Beobachtung dar und wird als aktueller Rand bezeichnet.

## 2.1 Der HP-Filter

Da der HP-Filter in seiner modifizierten Form rekursiv angewendet bisher das Standardverfahren war, scheint es für die spätere Diskussion nützlich, dessen Grundlagen hier kurz zu wiederholen. Der von Hodrick und Prescott [14] in der Makroökonomie populär gemachte Filter (HP-Filter), kann auf drei verschiedene Arten interpretiert werden:

- (i) Als Glättung einer gegebenen Zeitreihe
- (ii) Als Tiefpass-Filter
- (iii) Als Zustandsraummodell

Diese drei Sichtweisen sind zwar asymptotisch äquivalent, unterscheiden sich aber bei kleinen Stichproben, wie sie für die makroökonomische Anwendung typisch sind, signifikant, insbesondere in Bezug auf den aktuellen Rand.

Dabei steht vor allem die erste Sichtweise im Fokus des SBW-Berichts, wobei in der Anwendung eine Modifikation vorgenommen wird (siehe Bruchez [4]), die den End-Point-Bias verringern soll.

---

<sup>3</sup>Auf Seite 16 im SBW-Bereich heist es: “Toutes ces méthodes sont appliquées sur le log du BIP”. Dies hat, wie in Abschnitt 4 dargelegt, weitreichende Konsequenzen.

<sup>4</sup>Siehe auch die Ausführungen in Abschnitt 5.1 des SBW-Berichts.

### 2.1.1 Glättung

Der HP-Filter extrahiert aus den Beobachtungen  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_T)'$  eine geglättete Reihe  $T = (T_1, T_2, \dots, T_T)'$ . Diese geglättete Reihe, kurz Trend, soll sich einerseits dem aktuellen Verlauf des BIP möglichst gut anpassen, andererseits aber wesentlich weniger schwanken und so einen gleichmässigeren (geglätteten d.h. weniger gekrümmten) Verlauf zeitigen. Zwischen den beiden Zielen Anpassung und Krümmung besteht eine Austauschbeziehung ("trade-off"), die durch den Hyperparameter  $\lambda \geq 0$  gesteuert wird. Dieser Parameter muss *a priori* festgelegt werden und spiegelt die subjektive relative Bedeutung, die der Anwender den beiden Zielen zumisst, wieder. Formal betrachtet löst der HP-Filter das folgende Minimierungsproblem:

$$\underbrace{\sum_{t=1}^T (Y_t - T_t)^2}_{\text{Anpassungsgüte}} + \lambda \underbrace{\sum_{t=2}^{T-1} [(T_{t+1} - T_t) - (T_t - T_{t-1})]^2}_{\text{Krümmung}} \rightarrow \min_{T_1, T_2, \dots, T_T} \quad (2.1)$$

oder in Matrixschreibweise

$$\underbrace{(Y - T)'(Y - T)}_{\text{Anpassungsgüte}} + \lambda \underbrace{T' S' S T}_{\text{Krümmung}} \rightarrow \min_T, \quad (2.2)$$

wobei

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der zweite Summand der Zielfunktion des Minimierungsproblems kann als Durchschnitt der approximativen zweiten Ableitungen aufgefasst werden und stellt somit ein Mass für die durchschnittliche Krümmung des Trends dar. Ist die Steigung  $T_t - T_{t-1}$  konstant, der Trend also eine Gerade, so ist das Krümmungsmass null. Ist hingegen  $T_t = Y_t$ , so stimmen der Trend und die ursprüngliche Zeitreihe überein. Diese Lösung wird erzielt, wenn dem Krümmungsmass kein Gewicht beigemessen wird,  $\lambda$  also gleich null gesetzt wird. Für positive Werte von  $\lambda$  weicht  $T_t$  von  $Y_t$  ab, wobei die Varianz des Trendwachstums kleiner als die Varianz des Wachstums der ursprünglichen Reihe

ist. Für  $\lambda \rightarrow \infty$  gewinnt das Ziel, das Krümmungsmass zu minimieren, immer mehr an Gewicht und  $T_t$  nähert sich einer Geraden an.

Es lässt sich zeigen, dass das Minimierungsproblem eine eindeutige Lösung besitzt. Diese Lösung ist in Matrixschreibweise durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\widehat{T}_T = (I_T + \lambda S' S)^{-1} Y, \quad (2.3)$$

wobei  $\widehat{T}_T = (\widehat{T}_{T1}, \widehat{T}_{T2}, \dots, \widehat{T}_{TT})'$ . Daraus folgt, dass die geschätzte Trendkomponente  $\widehat{T}_{Tt}$  für den Zeitpunkt  $t$  ein gewichteter Durchschnitt *aller* Beobachtungen ist:

$$\widehat{T}_{Tt} = \sum_{s=1}^T w_{Tts} Y_s. \quad (2.4)$$

Die Differenz  $\widehat{C}_{Tt} = Y_t - \widehat{T}_{Tt}$  wird als zyklische oder konjunkturelle Komponente definiert und als geschätzte Produktionslücke interpretiert.

Der HP-Filter ist also ein zweiseitiger Filter, der für die Berechnung von  $\widehat{T}_{Tt}$  sowohl vergangene als auch zukünftige Beobachtungen miteinbezieht. Die Indexierung mit  $T$  macht deutlich, dass der so geschätzte Trend  $\widehat{T}_T$  und die Gewichte  $\{w_{Tts}\}_{t,s}$  eine Funktion der Stichprobe bzw. Stichprobengrösse  $T$  sind. Dabei hängen die Gewichte zusätzlich noch von der Stellung von  $t$  innerhalb der Stichprobe ab: Das Gewicht  $w_{TtT}$ , mit dem  $Y_T$  in die Bestimmung von  $\widehat{T}_{Tt}$  eingeht, ist nicht konstant, sondern hängt von  $t$  ab. Mit jeder neuen Beobachtung muss daher die gesamte Trendreihe aufdatiert werden.

Wegen dieser dreifachen Indexierung der Gewichte  $w_{Tts}$  können die Elemente der Matrix  $(I_T + \lambda S' S)^{-1}$  nicht durch eine einfache Formel angegeben werden. Zwar geben De Jong und Sakarya [6] eine explizite Formel an, doch ist diese nicht unbedingt einfach zu durchschauen, um so die Wirkung des Filters im Detail zu analysieren. Aus diesem Grund wird oft versucht, die Eigenschaften des HP-Filters durch Simulationen zu ermitteln. Bei einer rekursiven Anwendung wie im SBW-Bericht kommt diesem Argument eine noch grössere Bedeutung zu.

Trotzdem lassen sich einfache Schlussfolgerungen aus Gleichung (2.3) ziehen. Wegen  $S\iota = 0$  mit  $\iota = (1, 1, \dots, 1)'$  summieren sich die Filtergewichte zu eins, d.h.  $\sum_{s=1}^T w_{Tts} = 1$ . Die geschätzte Produktionslücke  $Y_t - \widehat{T}_{Tt}$  ist daher im arithmetischen Mittel gleich null, d.h. es gilt  $\sum_{t=1}^T (Y_t - \widehat{T}_{Tt}) = 0$ . Diese Symmetrie erfüllt daher automatisch eine der gesetzlichen Vorgaben zur Schuldenbremse. Falls  $Y = (1, 2, \dots, T)'$  also eine Gerade ist, so ist  $\widehat{T}_{Tt} = t$ , da  $SY$  in diesem Fall gleich null ist. Daher gilt  $\sum_{s=1}^T w_{Tts}s = t$ . Eine Gerade wird durch den HP-Filter wieder in eine Gerade überführt.<sup>5</sup> Falls der Trend

<sup>5</sup>Vergleiche dazu die Ausführungen in Abschnitt 5.1 und Appendix XI im SBW-Bericht.

tatsächlich eine Gerade ist, so stellt die HP-gefilterte Reihe eine erwartungstreue Schätzung dar, unabhängig davon wie steil diese Gerade ist. Dies gilt insbesondere auch am aktuellen Rand

Aus der Gleichung (2.4) geht hervor, dass der Schätzwert des Trends zum Zeitpunkt  $t$ ,  $\hat{T}_{Tt}$ , eine gewichtete Summe aus den  $t - 1$  vergangenen Werten, den  $T - t$  zukünftigen Werten und dem laufenden Wert von  $Y_t$  ist. Dies hat zur Folge, dass die geschätzte Produktionslücke  $Y_t - \hat{T}_{Tt}$  keine stationäre Zeitreihe sein kann.<sup>6</sup> Trotzdem kann gezeigt werden, dass die Produktionslücke ein schwach abhängiger (“weakly dependent”) Prozess ist, falls die Ausgangszeitreihe  $\{Y_t\}$  als Summe eines integrierten Prozesses der Ordnung eins, eines deterministischen linearen Trend und eines stationären Prozesses dargestellt werden kann. Statistische Inferenz ist daher in diesem Rahmen nach wie vor valide. Dies gilt allerdings nicht, wenn die Ausgangszeitreihe integriert der Ordnung zwei sollte (siehe De Jong und Sakarya [6]).

Falls  $T$  eine ungerade Zahl ist und  $t = T/2 + 1$  ist, dann hängt  $\hat{T}_{Tt}$  sowohl von allen vergangenen Beobachtungen  $Y_{t-s}$ ,  $s = 1, \dots, T/2$ , als auch von allen zukünftigen Beobachtungen  $Y_{t+s}$ ,  $s = 1, \dots, T/2$  und  $Y_t$  selbst ab. Dabei werden Vergangenheit und Zukunft gleich gewichtet und es gilt  $w_{Tt,t-s} = w_{Tt,t+s}$ ,  $s = 1, \dots, T/2$ . Nähert sich nun  $t$  dem aktuellen Rand, so wird der Filter mehr und mehr asymmetrisch, bis er schliesslich am aktuellen Rand zu einem einseitigen Filter wird. Diese Asymmetrie verzerrt das geschätzte Produktionspotential bei negativer Produktionslücke nach unten (wie in der gegenwärtigen Situation) und bei positiver Produktionslücke nach oben (siehe u.a. Hamilton [10]) und führt daher zu einem end-point-Bias (“end-of-sample-bias”). Diesem Bias kommt in der aktuellen wirtschaftlichen Situation eine besondere Bedeutung zu. Hinzu kommt, dass Datenrevisionen die Unsicherheit der Schätzung am aktuellen Rand weiter verschärfen. Der Bereinigung dieser Verzerrung kommt daher in der Konzeption der laufenden Wirtschaftspolitik eine grosse Bedeutung zu. Abbildung 4.1 beschreibt die Abhängigkeit des letzten Schätzwerts  $\hat{T}_{Tt}$  von der letzten Beobachtung  $Y_T$ .

Die gängigste Methode mit diesem Problem umzugehen, besteht darin, die Stichprobe künstlich um Prognosewerte zu erweitern. Dies mildert zwar zugegebenermassen die Verzerrung, doch handelt man sich dadurch ein neues Problem ein. Prognosen verschiedener Institutionen sind oft sehr unterschiedlich und werden laufend mehr oder weniger stark korrigiert. Damit schafft man einen unerwünschten Ermessensspielraum (siehe SBW [24, S. 11 Box 1]). Deshalb wird automatisierten modifizierten HP-Filtern der Vorzug gege-

---

<sup>6</sup>Dies trifft allerdings bei der rekursiven Anwendung des HP-Filters mit fester Bandbreite nicht zu (siehe dazu Appendix A).

ben. In der Eidgenössischen Finanzverwaltung kommt seit einiger Zeit eine Variante des HP-Filters (mHP-Filter) zur Anwendung, der den Wert von  $\lambda$  für die letzten beiden Beobachtungen ad hoc nach oben korrigiert und somit dem Krümmungsmass eine grössere Bedeutung beimisst. So wird am aktuellen Rand der Glattheit ein höheres Gewicht bei der Minimierung gegeben (siehe Bruchez [4]).

Neben diesem einfachen Verfahren werden in der Literatur weitere komplexere Vorschläge diskutiert. Ihnen ist gemeinsam, dass sie dem Minimierungsproblem (2.1), wie im Fall des mHP-Filters, zusätzliche Nebenbedingungen auferlegen. So ist folgende interessante Variante in EU Independent Fiscal Institutions [7] bzw. in St-Amant und van Norden [25] besprochen:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\sum_{t=1}^T (Y_t - T_t)^2}_{\text{Anpassungsgüte}} + \lambda \underbrace{\sum_{t=2}^{T-1} [(T_{t+1} - T_t) - (T_t - T_{t-1})]^2}_{\text{Krümmung}} \\
& + \lambda_{pr} \underbrace{\sum_{t=2}^{T-1} (T_t - T_{t-1})^2}_{\text{a priori Prognose}} + \lambda_{ss} \underbrace{\sum_{t=T-J}^T (T_t - T_{t-1} - \mu_{ss})^2}_{\text{“end-of-sample” Anker}} \rightarrow \min_{T_1, T_2, \dots, T_T}. \quad (2.5)
\end{aligned}$$

Diese Variante erweitert das ursprüngliche Minimierungsproblem (2.1) um zwei Ausdrücke, wobei nicht unbedingt beide zur Anwendung kommen müssen. Der erste dieser beiden Ausdrücke bestraft die Revision der Wachstumsrate des Trend-BIP, die durch neue Beobachtungen hervorgerufen wird. Ein hoher Wert von  $\lambda_{pr}$  reduziert den Einfluss neuer Beobachtungen. Der zweite Ausdruck “verankert” die Wachstumsrate des Trend-BIP am aktuellen Rand bei  $\mu_{ss}$ . Der Wert  $\mu_{ss}$  kann dabei der langfristigen (“steady state”) Wachstumsrate des Produktionspotentials entsprechen, kann aber auch ein beliebiger Wert sein. Der Einfluss dieses Ausdrucks wird dabei auf die letzten  $J+1$  Perioden beschränkt.<sup>7</sup>

Eine ähnliche, aber weniger komplexe, Strategie verfolgt der Ansatz von Jönsson [15] und [16]. Sei  $I$  eine Teilmenge von  $\{1, 2, \dots, T\}$  bestehend aus  $N \leq T$  Elementen. Die Menge  $I$  enthält jene Zeitindizes, für die bei der Trendberechnung Einschränkungen gemacht werden sollen. Die Einschränkungen werden in einem  $T$ -dimensionalen Vektor  $G = (g_1, \dots, g_T)'$  zusammengefasst, wobei die Werte für die Indizes in  $\{1, 2, \dots, T\} \setminus I$  gleich null gesetzt werden und jene für die Indizes in  $I$  gleich den a priori fixierten Werten. Die Werte von  $G$  geben die subjektive Einschätzung der Produktionlücke

<sup>7</sup>Vergleiche dazu die Ausführungen zur geometrischen Extrapolation in Abschnitt 5.1.2 des SBW-Berichts.

$Y - T$  wieder. Das Minimierungsproblem in Matrixschreibweise stellt sich dann wie folgt dar:

$$\underbrace{(Y - T)'(Y - T)}_{\text{Anpassungsgüte}} + \lambda \underbrace{T'S'ST}_{\text{Krümmung}} + \lambda_G (Y - T - G)' \Psi' \Psi (Y - T - G) \rightarrow \min_T, \quad (2.6)$$

wobei  $\Psi$  eine Diagonalmatrix mit

$$\Psi(i, i) = \begin{cases} 1, & i \in I; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Lösung des Minimierungsproblems ist

$$\hat{T} = (I_T + \lambda_G \Psi + \lambda S'S)^{-1} ((I_T + \lambda_G \Psi)Y - \lambda_G \Psi G). \quad (2.7)$$

Falls keine Einschränkungen gemacht werden, also  $I = \emptyset$  und somit  $G = 0$  und  $\Psi = 0$  sind, ergibt sich der ursprüngliche HP-Filter (siehe Gleichung (2.4)). Je grösser  $\lambda_G$  ist, desto eher folgt die Produktionslücke  $Y_t - T_t$  für  $t \in I$  dem vorgegebenen Werten  $g_t$ . Über diesen Mechanismus lässt sich die subjektive Einschätzung am aktuellen Rand  $T$  einfach berücksichtigen. Für Quartalsdaten und  $\lambda = 1600$  operiert Jönsson mit einem Wert von 10'000 für  $\lambda_G$ .

Bleibt noch der Wert des Glättungsparameters  $\lambda$  zu diskutieren. Hodrick und Prescott [14] schlagen in ihrem Aufsatz aufgrund von Überlegungen zur US Konjunktur den Wert von 1600 für Quartalsdaten vor (siehe dazu die Überlegungen in Abschnitt 2.1.2 und 2.1.3). Dieser Wert wurde von vielen Forschern mehr oder weniger widerspruchlos übernommen. Welcher Wert aber diesem bei Jahresdaten entspricht wurde kontrovers beurteilt. So wurden Werte von  $\lambda$  für Jahresdaten von 6.25 bis 500 vorgeschlagen. Sowohl die theoretische Analyse von De Jong und Sakarya [6, Abschnitt VI] als auch die Simulationen des SBW-Berichts in Abschnitt 4.1.1 bestätigen die Berechnungen von Ravn und Uhlig [23], wonach dem Wert 1600 auf Quartalsbasis der Wert 6.25 auf Jahresbasis bzw. dem Wert von 100 auf Jahresbasis der Wert von 25'600 auf Quartalsbasis entspricht. Diese Entsprechung gilt allerdings nur, wenn in der Anwendung auf Jahresbasis und jener auf Quartalsbasis die Daten entweder beide auf Jahresbasis oder beide auf Quartalsbasis ausgewiesen werden.

### 2.1.2 Tiefpass-Filter

Für die Interpretation und das Verständnis der Wirkung von Filtern ist es hilfreich, diese im Frequenzbereich zu betrachten. Dies ist insofern angebracht, da der HP-Filter mehr oder weniger explizit eine Einteilung der

Zyklen einer Zeitreihe in lang- bzw. kurzfristige Schwingungen unternimmt (siehe Baxter und King [3]). So werden Schwingungen mit einer Periode länger als  $\frac{2\pi}{\pi/16} = 32$  Quartalen der Trendkomponente zugeschlagen; Schwingungen mit kürzerer Periodizität werden als Konjunkturschwankungen interpretiert und der Produktionslücke zugeschlagen. Folgt man dieser subjektiven Einschätzung von Hodrick und Prescott, so würde ein *idealer Filter* zur Extraktion der Konjunkturschwankungen eine Treppenfunktion als Transferfunktion  $\Psi(e^{-\iota\lambda})$  haben.<sup>8</sup> Sie wäre im Bereich 0 bis  $\lambda_C = \pi/16$  gleich null und im Bereich  $\lambda_C = \pi/16$  bis  $\pi$  gleich eins:

$$\Psi(e^{-\iota\omega}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \omega \leq \lambda_C; \\ 1, & \lambda_C < \omega \leq \pi. \end{cases}$$

Bezeichnet man mit  $L$  den Lag-Operator, so lassen sich aufgrund der Fourier-Analyse die Koeffizienten  $\{\psi_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$  des entsprechenden zweiseitigen symmetrischen Hochpass-Filters  $\Psi(L) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j L^j$  wie folgt berechnen:

$$\psi_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda_C}^{\lambda_C} e^{-\iota\omega j} d\omega = \begin{cases} \frac{\lambda_C}{\pi}, & j = 0; \\ \frac{\sin(j\lambda_C)}{j\pi}, & j \neq 0. \end{cases}$$

Da die Anzahl der Filterkoeffizienten (sowohl für Vergangenheit als auch für die Zukunft) unendlich ist, kann dieser ideale Filter nicht implementiert werden. Um dieses Problem zu umgehen, wird der Filter auf die Länge  $2q$  gestutzt:  $\tilde{\Psi}_q(L) = \sum_{|j| \leq q} \psi_j L^j$ . Die Wahl von  $q$  ist dabei arbiträr und bleibt dem Anwender überlassen.

Abbildung 2.1 gibt die Transferfunktionen des idealen Filters sowie zweier gestutzter Filter mit  $q = 8$  bzw.  $q = 32$  wieder. Dabei zeigt sich, dass die gestutzten Filter zwar die Treppenform des ideal Filters mehr oder weniger genau approximieren, dass aber zusätzlich kleine Schwingungen (sogenannte Überschwingungen) erzeugt werden. Dieses als Gibbs-Phänomen bekannte Verhalten der gestutzten Filter ist ein Ausdruck der Randinstabilität zweiseitiger Filter.

Die Transferfunktion des HP-Filters ist

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{\lambda(2 - 2\cos\omega)^2 + 1} \quad \text{mit } 0 \leq \omega \leq \pi$$

und ist ebenfalls zum Vergleich in Abbildung 2.1 wiedergegeben. Diese Kurve stellt allerdings eine Idealisierung dar, die von unendlich vielen Beobachtungen ausgeht. Bei endlich vielen Beobachtungen muss der Filter gestutzt

---

<sup>8</sup>Die Transferfunktion eines symmetrischen Filters gibt den Faktor, in Abhängigkeit vom Frequenzbereich, an, mit der, im Frequenzbereich betrachtet, die Originalzeitreihe multipliziert werden muss, um die gefilterte Reihe zu erhalten. Dabei bezeichnet  $\iota$  die imaginäre Einheit.

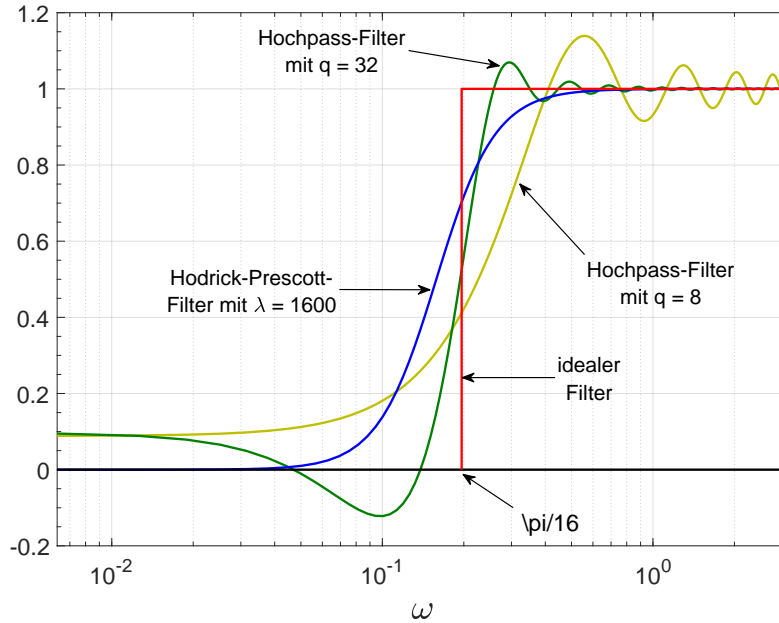


Abbildung 2.1: Transferfunktionen verschiedener Filter

werden, was sich insbesondere am aktuellen Rand negativ auswirkt (Randinstabilität).

### 2.1.3 Zustandsraummodell

Besonders zielführend für die Anpassung des HP-Filters an die derzeitige Situation bzw. für Verallgemeinerungen ist seine Interpretation im Rahmen der Wiener-Kolmogorov-Filter-Theorie als Zustandsraummodell.<sup>9</sup> Ausgangspunkt bildet die beobachtete Zeitreihe  $\{Y_t\} = \{\ln BIP_t\}$ , die sich, wie bisher, additiv aus zwei Komponenten zusammensetzt:

$$Y_t = T_t + C_t, \quad \text{mit } C_t \sim \text{WN}(0, \sigma_C^2), \quad (2.8)$$

dabei bezeichnet  $T_t$  das gesuchte nicht-beobachtbare Trend-BIP und  $C_t$  die zyklische Komponente. Letztere wird als Produktionslücke interpretiert. Beide Komponenten sind per Annahme zu allen Lead-Lag-Beziehungen unkorreliert, d.h.  $\mathbb{E}T_t C_s = 0$  für alle  $t, s \in \mathbb{Z}$ . Die Trendkomponente folgt einem

<sup>9</sup>Weiterführende Erläuterungen sind u.a. in Harvey [11], Kim und Nelson [17] und Neusser [20] zu finden.



Random Walk mit zeitvariabler Drift  $\delta_t$ :

$$\begin{aligned} T_t &= \delta_{t-1} + T_{t-1} \\ \delta_t &= \delta_{t-1} + \xi_t, \quad \text{mit } \xi_t \sim \text{WN}(0, \sigma_\xi^2). \end{aligned}$$

Da der Driftterm  $\delta_t$  als Random Walk konzipiert ist, ist die Trendkomponente integriert der Ordnung 2.<sup>10</sup> Sei  $X_t = (T_t, \delta_t, C_t)'$  der Zustandsvektor, dann lässt sich das so spezifizierte Modell in Zustandsraumdarstellung wie folgt schreiben:<sup>11</sup>

$$\text{Beobachtungsgleichung: } Y_t = H X_t \quad (2.9)$$

$$\text{Bewegungsgleichung: } X_t = F X_{t-1} + V_t \quad (2.10)$$

mit

$$H = (1, 0, 1) \text{ und } F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Der Störterm  $V_t$  hat Erwartungswert null und Kovarianzmatrix  $Q$ :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_C^2 \end{pmatrix}.$$

Das Verhältnis  $\sigma_\xi^2/\sigma_C^2$  wird als “signal-to-noise-ratio” bezeichnet und muss vorgegeben werden. Es entspricht genau dem Kehrwert von  $\lambda$ . Die vollständige Spezifikation des Zustandsraummodells erfordert noch die Festlegung eines Anfangswert  $X_0$  mit entsprechender Kovarianzmatrix. Die Algorithmen von Kalman erlauben eine effiziente Schätzung des Zustandsvektors. Dabei werden zwei Varianten unterschieden. Beim *Kalman-Filter* werden die Schätzwerte von  $X_t$  rekursiv aus der Vergangenheit berechnet. Dies entspricht in etwa der rekursiven Vorgangsweise im SBW-Bericht. Allerdings wird im SBW-Bericht eine feste bewegliche Bandbreite verwendet. Beim *Kalman-Smoother* hingegen werden neben den vergangenen auch zukünftige Beobachtungen berücksichtigt. Der HP-Filter kann nun als Kalman-Smoother mit entsprechend grosser Varianz für die Startwerte berechnet werden (siehe Hamilton [10] und Harvey und Trimbur [13]).

<sup>10</sup>Die Trendkomponente ist nach zweimaligem Differenzieren stationär, d.h.  $\Delta^2 T_{t+1} = \xi_t \sim \text{WN}(0, \sigma_\xi^2)$

<sup>11</sup>Die Darstellung ist nicht eindeutig. So lassen sich Zustandsraummodelle oft auf mehrere äquivalente Arten schreiben.

Ein wichtiger Punkt scheint mir zu sein, dass diese Methode es erlaubt, Konfidenzbänder für das Trend-BIP zu berechnen. Dies würde eine wichtige Einsicht in die mit diesen Verfahren, aber Filterverfahren ganz allgemein, verbundene Unsicherheit geben und so ein Gespür für die Genauigkeit der Trendschätzungen bieten.

Zwar werden bei der Anwendung des HP-Filters im Sinne des Minimierungsproblems (2.1) keine Voraussetzungen bezüglich der stochastischen Eigenschaften des zugrunde liegenden Prozesses  $\{Y_t\}$  gemacht, doch ist es eine berechnete Frage, für welche Prozesse der HP-Filter optimal ist. Aufgrund der zumindest asymptotischen Äquivalenz zwischen der Interpretation des HP-Filters als Glättungsverfahren und als Zustandsraummodell ergibt sich, dass der HP-Filter genau dann optimal ist, wenn der datengenerierende Prozess durch die Gleichungen (2.9) und (2.10) gegeben ist. Wie man sich leicht überlegen kann, impliziert die Zustandsraumdarstellung des HP-Filters, dass  $Y_t \sim \text{ARIMA}(0, 2, 2)$  sein muss mit  $\rho_{\Delta^2 Y}(1) = -4\sigma_C^2/(\sigma_\xi^2 + 6\sigma_C^2)$ ,  $\rho_{\Delta^2 Y}(2) = \sigma_C^2/(\sigma_\xi^2 + 6\sigma_C^2)$  und  $\rho_{\Delta^2 Y}(h) = 0$  für  $|h| > 2$ . Für datengenerierende Prozesse, wie sie makroökonomischen Zeitreihen üblicherweise unterstellt werden, ist der HP-Filter keineswegs optimal.<sup>12</sup> Es macht daher durchaus Sinn, nach Alternativen zu suchen, wie dies im SBW-Bericht getan wird.

Zustandsraummodelle sind äusserst flexibel. Sie erlauben es auf eine einfache Weise, zusätzliche Variable im Modell zu berücksichtigen oder komplexere Zusammenhänge zu spezifizieren (siehe die Ausführungen in Abschnitt 2.3). So lässt sich auch die in Abschnitt 2.1.1 beschriebene Methode von Jönsson [15] und [16] leicht implementieren. Dazu erweitern wir die Beobachtungsgleichung zu

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ g_t \end{pmatrix} = H_t X_t \quad \text{mit } H_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in I.$$

Die Matrix  $H_t$ , die den Zustandsvektor mit den Beobachtungen verbindet ist nun zeitvariabel. So ist  $H_t$  normalerweise gleich  $(1, 0, 1)$ , nur in den Perioden  $t \in I$  ist sie durch obige Spezifikation gegeben. Somit entspricht für die Zeitperioden  $t \in I$  die geschätzte Produktionslücke  $Y_t - T_t$  exakt den vorgegeben Werten  $g_t$ . Dies entspricht  $\lambda_G \rightarrow \infty$ . Kleine Werte von  $\lambda_G$  können durch Einführung eines zusätzlichen Störterms in der Beobachtungsgleichung berücksichtigt werden.

## 2.2 Lokale polynomiale Kernregression

Wie in Abschnitt 2.1.1 ausgeführt, konvergiert der Trend für  $\lambda \rightarrow \infty$  gegen eine Gerade. Durch die rekursive Anwendung mit einem Fenster von 24

<sup>12</sup>Dieser Punkt wird insbesondere von Hamilton [10] hervorgehoben.

Jahren wird effektiv eine *lokale lineare Kernregression* implementiert und so implizit eine Brücke zu einer alternativen weitverbreiteten Klasse von Glättungsverfahren geschlagen. In Appendix X des SBW-Berichts werden ähnliche Überlegungen angestellt, ohne allerdings auf die Theorie des lokalen linearen (polynomiale) Kernregression zu verweisen. Bei der lokalen linearen Kernregression wird eine Zeitreihe lokal durch eine Gerade - oder allgemeiner durch ein Polynom - approximiert. Für eine ausführliche Darstellung und Analyse dieser Verfahren siehe Fan und Yao [9, Kapitel 6] und die darin angeführte Literatur.

Bei der lokalen linearen Kernregression ergibt sich der Wert des Trends zum Zeitpunkt  $t$  aus dem entsprechenden lokalen gewichteten Kleinst-Quadrate-Problem:

$$\sum_{s=1}^T (Y_s - a - b(s-t))^2 K_h(s-t) \rightarrow \min_{a,b}, \quad (2.12)$$

wobei  $K_h(s-t)$  eine Kernfunktion mit Bandbreite (Fensterbreite)  $h$  bezeichnet. Kernfunktionen sind typischerweise nichtnegative, symmetrische unimodale Dichtefunktionen. Sie gewichten Beobachtungen, die weiter vom gegebenen Zeitpunkt  $t$  entfernt sind, herab und geben so den aktuelleren Beobachtungen ein grösseres Gewicht. Typische Kernfunktionen sind die Gauss'sche und die Epanechnikov Kernfunktionen:

$$\text{Gauss'sche Kernfunktion: } K(u) = \frac{1}{2\pi} \exp(-u^2/2)$$

$$\text{Epanechnikov Kernfunktion: } K(u) = \frac{3}{4}(1-u^2)\mathbf{I}_{|u|\leq 1}$$

mit  $K_h(u) = K(u/h)/h$ . Die uniforme Kernfunktion, die in der rekursiven Vorgangsweise im SBW-Bereich implizit zur Anwendung kommt, ist als statistischen Überlegungen nicht zu empfehlen.

Der geschätzte Trendwert zum Zeitpunkt  $t$  ist dann durch den geschätzten Wert des Achsenabschnitts  $\hat{a}$  gegeben:

$$\hat{T}_{Tt} = \hat{a} = \frac{\sum_{s=1}^T w_{Tts} Y_j}{\sum_{s=1}^T w_{Tts}},$$

wobei die Gewichte  $w_{Tts}$  gleich

$$w_{Tts} = K_h(s-t) \left( \sum_{s=1}^T K_h(s-t)(s-t) - \sum_{s=1}^T K_h(s-t)(s-t)^2 \right)$$

sind. Die Normierung durch  $\sum_{s=1}^T w_{Tts}$  stellt dabei sicher, dass sich die Filtergewichte  $\frac{w_{Tts}}{\sum_{s=1}^T w_{Tts}}$  zu eins summieren. Der Filter ist daher symmetrisch ist. Ausserdem gilt:

$$\sum_{s=1}^T w_{Tts}(s-t) = 0 \quad \text{für alle } t.$$

Diese Eigenschaft impliziert, dass, falls der Trend eine Gerade sein sollte, d.h.  $T_t = \alpha + \beta t$ , der lokale lineare Kernschätzer erwartungstreu ist:

$$\mathbb{E}\hat{T}_{Tt} = \frac{\sum_{s=1}^T w_{Tts}(\alpha + \beta s)}{\sum_{s=1}^T w_{Tts}} = \alpha + \beta t.$$

Da diese Eigenschaft auch am aktuellen Rand gilt, besteht in diesem besonderen Fall kein end-point-Bias.

Typische Kernfunktionen sind die Gauss'sche- oder die Epanechnikov-Kernfunktion. Im SBW-Bericht wird implizit eine uniforme Kernfunktion gewählt. Sie hat für Beobachtungen  $s$  mit  $|s-t| \leq h$  den Wert eins, sonst null. Die standard Fensterbreite bei der Anwendung des mHP-Filters beträgt  $24/2 = 12$  Jahre. Die Überlegungen zur LOESS-Methode in Abschnitt 4.1.4 und zur OLUFHPR-Methode im SBW-Bericht zeigen allerdings, dass sich mit kleineren Bandbreiten valide Ergebnisse erzielen lassen. Es wäre in diesem Rahmen sinnvoll die uniforme Kernfunktion durch die Gauss'sche oder Epanechnikov-Kernfunktion zu ersetzen, da diese im Gegensatz zur uniformen Kernfunktion gewisse Optimalitätskriterien erfüllen (siehe Fan und Yao [9, Kapitel 6]), und mit anderen Bandbreiten zu experimentieren.

Die Theorie der lokalen linearen (polynomialen) Regression fusst auf einem soliden statistischen Fundament (siehe Fan und Yao [9, Kapitel 6]). Dabei kommt der Wahl der Bandbreite  $h$  eine ähnliche Bedeutung wie  $\lambda$  für den HP-Filter zu.<sup>13</sup> Auch sie steuert den Trade-off zwischen Anpassungsgüte und Glattheit: Wird  $h$  gross gewählt, so nähert sich die geglättete Kurve einer Geraden an; ist  $h$  klein, so ist zwar die Anpassungsgüte gross, die Kurve aber sehr zackig (geringe Glättung). Wie im Fall des HP-Filters ist bei der geplanten Anwendung das Problem des Endpoint-Bias bzw. der Randinstabilität zu berücksichtigen. Dabei könnten ähnliche Überlegungen wie für den HP-Filter beschrieben zum Zuge kommen. Die Covid-19-Pandemie könnte in diesem Rahmen durch Dummy-Variable in den lokalen Regressionen berücksichtigt werden.

Die Ergebnisse zur LOESS- und OLUFHPR-Methode im SBW-Bericht (siehe Figure 1) und in Bruchez und Schmassmann [5] sind sehr ermutigend.

---

<sup>13</sup>Die Wahl der Kernfunktion spielt dabei eine untergeordnete Rolle.

Verglichen mit den besten Verfahren ergeben sich nur geringe Unterschiede in Bezug auf die Kriterien Volatilität und mittlerer Produktionslücke. Eine systematische Anwendung im Rahmen der Theorie lokaler linearer Regressionen scheint wünschenswert.

## 2.3 Multivariate Filter

Das in Abschnitt 2.1.3 beschriebene Zustandsraummodell kann leicht modifiziert werden, um weitere Variable oder zusätzliche Aspekte zu berücksichtigen. Dadurch ist es möglich, mehr ökonomischen Sachverstand einzubringen. Basierend auf den Arbeiten von Stalder [27] sind im SBW-Bericht einige multivariate Filter untersucht worden. Diese haben vor allem versucht, die Gegebenheiten am Arbeitsmarkt, die viel über den konjunkturellen Verlauf auszusagen, als zusätzliche Information für die Schätzung des Trend-BIP's zu berücksichtigen. Dazu erweitern wir die Beobachtungsgleichung um eine weitere beobachtete Variable  $U_t$  und eine *irreguläre* Komponente  $W_t = (W_{1t}, W_{2t})'$ :

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ U_t \end{pmatrix} = HX_t + W_t \quad \text{mit } H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

und  $W_t \sim \text{WN}(0, R)$  mit

$$R = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich können ohne grösseren Aufwand weitere beobachtete Variablen auf diese Weise eingeführt werden. Dazu muss man  $U_t$  nur als Vektor auffassen und  $W_t$  bzw. die Matrizen  $H$  und  $R$  entsprechend anpassen.

Im Gegensatz zu Stalder [27] und den im SBW-Bericht angewandten multivariaten Filtern setzt sich die beobachtete Zeitreihe  $Y_t$  *nicht* ausschliesslich als Summe der Trendkomponente und der zyklischen Komponente zusammen, sondern berücksichtigt noch eine irreguläre Komponente  $\{W_{1t}\} \sim \text{WN}(0, \sigma_1^2)$ . Eine solche Erweiterung wird nicht nur von Harvey [11] und Harvey und Trimbur [12] vorgeschlagen, sondern scheint sich auch aufgrund der Simulationen von Schmassmann et al. [24] aufzudrängen. So führen letztere das überraschend relativ schlechte Abschneiden der multivariaten Filtermethode darauf zurück, dass durch Berücksichtigung zusätzlicher Variablen ein grösseres Rauschen ins System eingeführt wird. Dieses zusätzliche Rauschen schlägt sich nun in der Schätzung der Produktionslücke und damit des Trend-BIP's nieder. Durch die Berücksichtigung der irregulären Komponente wird dieses Rauschen aufgefangen und nicht automatisch der Produktionslücke

zugeteilt. Ausserdem gilt es zu berücksichtigen, dass die Annahme, die zyklische Komponente (Produktionslücke) sei Weisses-Rauschen, unrealistisch ist.

Eine weitere interessante Verallgemeinerung besteht laut Harvey und Trimbur [13] darin, die zyklische Komponente (Produktionslücke)  $C_t$  explizit als Kosinus bzw. Sinus-Schwingung zu modellieren. Dazu müsste die Bewegungsgleichung entsprechend adaptiert werden. Diese Spezifikation impliziert, dass die Produktionslücke  $\{C_t\}$  statt, wie ursprünglich angenommen einem Weissen-Rauschen, einem ARMA(2,1)-Prozess folgt.

### 3 Modellbasierte Verfahren

Der HP-Filter und seine Erweiterungen können für gegebene Hyperparameter und fixe Stichprobengrösse als Matrizen  $\mathcal{F}$  geschrieben werden. Für den einfachen HP-Filter z.B. gilt:  $\mathcal{F} = (I_T + \lambda S'S)^{-1}$  (siehe Gleichung (2.4)). Der HP-Filter ist daher ein linearer Operator auf dem  $T$ -dimensionalen Vektorraum der Beobachtungen.<sup>14</sup> Angewendet auf die aggregierte Cobb-Douglas Produktionsfunktion  $Y = AL^\alpha K^\beta$ , wobei  $A$  den Stand der Technologie,  $L$  den Arbeitsinput und  $K$  den Kapitalstock bezeichnet, ergibt dies:

$$\mathcal{F} \log Y = \mathcal{F} \log A + \alpha \mathcal{F} \log L + \beta \mathcal{F} \log K.$$

Diese Beziehung legt nahe, das Produktionspotential, definiert als den gefilterten Logarithmus des BIP  $\mathcal{F} \log Y$  zu definieren und gemäss obiger Formel aus seinen Einzelkomponenten zu berechnen. In den Appendizes III, IV im VIII des SBW-Bericht wird diese Methode in aller Einzelheit geschildert und gewürdigt, wobei konstante Skalenerträge, d.h.  $\alpha + \beta = 1$ , unterstellt werden.

Bei dieser Vorgangsweise treten sowohl konzeptuelle wie praktische Messprobleme auf. Erstens ist die oben spezifizierte Produktionsfunktion keine Produktionsfunktion im eigentlichen Sinne. Dies hängt mit der Messung des BIP als gesamtwirtschaftliche Wertschöpfung, bei der Vorleistungen wie die Kosten für Energie- und Materialeinsatz abgezogen werden, zusammen. Nur im Falle vollständiger Konkurrenz, wenn die Preise gleich den Grenzkosten entsprechen, oder wenn die Substitutionselastizität zwischen Vorleistungen und den anderen Produktionsfaktoren (Arbeit und Kapital) null ist, gibt die auf der Wertschöpfung basierende Produktionsfunktion die Verhältnisse korrekt wieder (siehe Basu und Fernald [1, Abschnitt IB]). Das hat insbesondere Konsequenzen für die Berechnung des Standes der Technologie  $A$  als Solow-Residuum. Auch hier wird implizit unterstellt, dass die Produktionsfaktoren

---

<sup>14</sup>Für zwei  $T$ -dimensionale Vektoren  $Y_1$  und  $Y_2$  sowie beliebige Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt:  $\mathcal{F}(aY_1 + bY_2) = a\mathcal{F}Y_1 + b\mathcal{F}Y_2$ .

nach ihrem Grenzprodukt entlohnt werden. Die Verwendung der aggregierten Produktionsfunktion als Basis zur Bestimmung des Produktionspotentials scheint unter theoretischem Gesichtspunkt daher problematisch zu sein.<sup>15</sup>

Zweitens leiden Verfahren, die auf der aggregierten Produktionsfunktionen beruhen, unter erheblichen Messproblemen. Nicht nur, dass alle bereits diskutierten Probleme im Zusammenhang mit der Anwendung von Filtern für jede der drei Inputfaktoren auftreten, müssen sowohl der Arbeitsinput als auch der Kapitalinput um die jeweilige Kapazitätsauslastung korrigiert werden. Die Bestimmung des Arbeitsvolumens als Produkt aus Bevölkerung, Partizipationsrate, Erwerbsquote, und durchschnittliche Arbeitsstunden z.B. zieht weitere Messprobleme nach sich (siehe Appendix VIII im SBW-Bericht). Gemäss dieser Logik wären eine weitere Disaggregation der Partizipationsrate nach Alter und Geschlecht angebracht, um so Entwicklungen in der Länge der Ausbildung, der Fertilität (Baby-Pause) oder des Pensionsantrittsalters Rechnung zu tragen. Ähnlich verhält es sich mit der Messung des Kapitalinputs als Produkt von Kapazitätsauslastung und Kapitalstock. Erschwerend kommt hinzu, dass die Messung eines aggregierten Kapitalstocks selbst wieder problematisch ist (Stichwort Cambridge-Cambridge-Kontroverse).

Die inflationsneutrale Arbeitslosenquote (NAIRU bzw. NAWRU) stellt ein weiteres Konzept zur Berechnung des Produktionspotentials dar. Es beruht auf der Phillipskurve, die den Zusammenhang zwischen Inflationsrate (Lohninflationsrate) und Arbeitslosenrate beschreibt. Dabei entspricht eine konstante Inflationsrate einer Arbeitslosenrate, die gleich der natürlichen Arbeitslosenrate ist. Die natürliche Arbeitslosenrate ihrerseits entspricht einer Normalauslastung des Faktors Arbeit. Dieser Wert geht dann über die Produktionsfunktion in die Berechnung des Produktionspotentials ein. Diese Idee ist vor allem für die Methode der Europäischen Kommission (EK-Methode) bedeutsam. Wie jedoch der SBW-Bericht in Abschnitt 4.1.1 zeigt, ist die Phillipskurve, zumindest für die Schweiz, kein valides Instrument mehr. Die Kurve ist so flach, dass faktisch kein Zusammenhang mehr zwischen Lohninflation und Erwerbslosenquote besteht.

Eine moderne Auffassung der Produktionslücke bieten Neu-Keynesianische stochastische dynamische allgemeine Gleichgewichtsmodelle ("New Keynesian DSGE models"). Diese Modelle sind mikroökonomisch fundiert und erlauben verschiedenste nominelle (langsame Preis- und Lohn Anpassung) wie reale (z.B. Mark-up aufgrund monopolistischer Konkurrenz) Rigiditäten. Das Produktionspotential ist dann definiert als jene Produktion, die sich einstellen würde, wenn alle nominellen Rigiditäten, insbesondere die Preis- und

---

<sup>15</sup>Erschwerend kommt hinzu, dass die Mark-ups nicht konstant sind, sondern über den Konjunkturzyklus hinweg antizyklisch schwanken.

Lohnrigiditäten, beseitigt wären. Leist und Neusser [18] haben eine erste Implementierung für die Schweiz vorgestellt. Erste Erfahrungen für andere Länder sind u.a. in Neiss und Nelson [19] dokumentiert. Obwohl ermutigend scheint dieser Zugang für die praktische wirtschaftspolitische Anwendung zu komplex und nicht belastbar genug zu sein. Ausserdem sind solche Verfahren wenig transparent und schwer zu kommunizieren, da sowohl jede einzelne Gleichung als auch die Bayesianischen Schätzverfahren kritisierbar sind.

## 4 Evaluation des Berichts

Der Bericht von Schmassmann, Bruchez und Wiedmer [24] breitet eine kaum überschaubare Flut an Berechnungen und Simulationsergebnissen verschiedenster Verfahren zur Trendextraktion, wobei für jedes Verfahren mehrere Parameterkonstellationen untersucht werden, aus. Allerdings verdient es nicht jede Variante, angeführt zu werden. Der Bericht könnte daher wesentlich gestrafft werden. Die fast ausschliessliche Berufung auf eigene Simulationsergebnissen vernachlässigt die ausufernde theoretische Literatur zum HP-Filter und verwandter Verfahren sowie die, in vielen Dokumenten festgehaltenen, ähnlichen praktischen Erfahrungen und Probleme von Institutionen anderer Staaten.

Der Leser hat Mühe mit den vielen Akronymen, die zwar bei der R-Programmierung von Vorteil sein können, den Lesefluss aber erheblich hemmen. Man merkt dem Bericht auch an, dass er unter grossem Zeitdruck verfasst worden ist. So kommt es immer wieder vor, dass die Sprache innerhalb eines Absatzes wechselt.

Die Eigenschaften der univariaten Filtermethoden sind zwar bekannt, doch bringt deren rekursive Anwendung bei konstanter Fensterbreite einen zusätzlichen Aspekt ein, der so in der Literatur nicht abgehandelt worden ist. Schon dieser Aspekt allein rechtfertigt die aufwendigen Simulationen und stellt somit ein positives Merkmal des Berichts dar.

Trotz der in Box 1 des SBW-Berichts vorgebrachten zum Teil einleuchtenden Argumente für eine rekursive Berechnung mit konstanter Fensterbreite der verschiedenen Verfahren, möchte ich doch auf eine gewisse Inkonsistenz hinweisen. Es ist ja nicht so, dass auf Prognosen ganz verzichtet werden kann. So müssen für die Anwendung im Jahr 2024 Prognosen des BIP für die Jahre 2020 bis 2024 verwendet werden. Daher meine Frage, warum nicht gleich bei der Berechnung für die Jahre 2020 bis 2023, wie sonst üblich, die Prognosen bis 2024 einfließen lassen? Auch die Prognosen bis ins Jahr 2024 müssen ja begründet werden. Ihr Argument, dass die Berechnungen für das Jahr 2020 nicht durch die Prognosen für die Jahre 2021 bis 2024 beeinflusst werden



sollen, kann ich nachvollziehen, doch handelt man sich dadurch eine stärkere Volatilität und eine grössere Verzerrung am aktuellen Rand ein, die dann wieder korrigiert werden muss. Dieser Verzicht auf die Verwendung von Prognosen wirkt sich nun in der Pandemie verstärkt aus, da ein “Anker” für das Produktionspotential fehlt.

Die Beurteilung der verschiedenen Verfahren erfolgt in erster Linie anhand von zwei Kriterien (siehe stellvertretend Figure 1 im SBW-Bericht): der mittleren Produktionslücke in Millionen CHF und der Volatilität des Trend-BIP's. Beide Kriterien sind meiner Meinung nach anfechtbar. Bei Zeitreihen mit exponentiellem Wachstum, wie das bei vielen makroökonomischen Zeitreihen, insbesondere aber des BIP's, der Fall ist, ist das Logarithmieren der Variablen aufgrund folgender Argumente aus statistischer Sicht notwendig:

- (i) Die Varianz der Zeitreihe wird stabilisiert.
- (ii) Die Zeitreihe wird “linearisiert”, so dass Differenzen als Prozente interpretiert werden können.  $\Delta \log BIP_t$  steht somit für die Wachstumsrate des BIP's in Prozent und  $\log BIP_t - T_t$  für die Produktionslücke ausgedrückt als prozentuelle Abweichung vom Produktionspotential.
- (iii) Ausserdem ist zu beachten, dass selbst wenn  $C_{Tt} = \log BIP_t - T_t \sim N(0, \sigma^2)$ ,

$$\mathbb{E} \exp(C_{Tt}) = \exp(\sigma^2/2) \exp(\mathbb{E}C_{Tt}) = \exp(\sigma^2/2) > 1$$

ist. Dies spiegelt sich den ausschliesslich positiven Werten des “mean gap” in vielen Abbildungen im SBW-Bericht wieder und letztlich in einer zu restriktiven Budgetpolitik wieder.

- (iv) Dies hat zur Folge, dass die kumulierten Produktionslücken nicht null sind. Dies stellt jedoch keinen Nachteil dar, da ja die durchschnittlichen prozentuellen Abweichungen null sind.
- (v) Die logarithmische Vorgangsweise fügt sich gut in die Berechnung des k-Faktors als Verhältnis von BIP zu Trend-BIP ein.
- (vi) Weiter ist in einer wachsenden Wirtschaft eine Produktionslücke von einer Million CHF im Jahr 2004 höher zu bewerten als im Jahr 2020, da die Bezugsgrössen ja gewachsen sind.

Statt den absoluten Werten wären daher die prozentuellen Werte als Kriterium zu nehmen. Das wird zwar das Ranking wahrscheinlich nicht gross

verändern und die wesentlichen Schlussfolgerungen nicht beeinflussen, doch wäre diese Vorgangsweise konsistent und ökonomisch weniger angreifbar.

Punkt (iii) wirft die prinzipielle Frage der Umrechnung von logarithmierten in absolute Grössen auf (siehe auch die Ausführungen Abschnitt 5.1.1 im SBW-Bereich). Falls  $\widehat{C}_{Tt} \sim N(0, \sigma^2)$ , so legt die obige Überlegung nahe, die Werte  $\exp \widehat{C}_{Tt}$  um den Faktor  $\hat{c} = \exp(\hat{\sigma}^2/2) > 1$  zu korrigieren.<sup>16</sup> Wie bereits ausgeführt ist  $C_{Tt}$  kein Weisses Rauschen und wahrscheinlich auch nicht normal verteilt. Der Korrekturfaktor kann aber aus den Daten wie folgt ermittelt werden:<sup>17</sup>

$$\hat{c} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \exp \widehat{C}_{Tt}. \quad (4.1)$$

Eine Überschlagsrechnung ergibt allerdings für den HP(100) einen relativ kleinen Wert von  $\hat{c} = 1.0002$ .

Folgt man dieser Argumentation so müsste in letzter Konsequenz auch der konstitutionelle Rahmen angepasst werden. Die Abweichungen von einem ausgeglichenen Haushalt sollten dann in Prozent der Einnahmen und nicht in Franken veranschlagt werden. Dies macht meiner Meinung auch Sinn, da ein Fehlbetrag von 1 Mrd. Fr. bei Staatsausgaben von 102 Mrd. Fr. wie 1990 im Jahr 1990 höher zu bewerten ist als der selbe Fehlbetrag im Jahr 2019 bei Staatsausgaben von 229 Mrd. Fr. Siehe Punkt 1 auf Seite 14 des SBW-Berichts, wo das mittelfristig ausgeglichene Budget als wichtiges Kriterium angesprochen wird.

Das zweite Kriterium “Volatilität” ist insofern problematisch als die Glätte des Trends durch Hyperparameter,  $\lambda$  im Fall des HP-Filters, gesteuert wird. Die Werte dieser Parameter werden a priori festgelegt und bestimmen so das Ausmass der Krümmung und damit letztlich das Volatilitätsmass. Daran ändert auch die rekursive Anwendung wenig: theoretisch glattere Trends weisen auch empirisch eine geringere Volatilität auf (vergleiche z.B. `MHP_100_24_years` mit `MHP_500_24_years` in Figure 1 im SBW-Bericht). Diese Bedenken werden auch durch das in Addendum zu Abschnitt 4.1 und Appendix XII vorgeschlagene alternative Volatilitätsmasse nicht ausgeräumt.

Wenn das Ziel der Übung nicht die Extraktion eines wie auch immer nach statistischen Kriterien definierten “optimalen” Trends besteht, sondern in der Anwendung als Instrument in der Implementation der Schuldenbremse und der Finanzplanung, dann kommt der Bereinigung des Endpoint-Bias und der Verminderung der Randwertinstabilität grösste Bedeutung zu. Dieser Focus bildet den wesentlichen Unterschied zu den üblichen Anwendungen

<sup>16</sup>Z.B. für  $C_{Tt} \sim N(0, 1)$  wäre dieser Faktor gleich  $c = 1.649$ .

<sup>17</sup>Alternativ könnte auch ein Bootstrap-Verfahren verwendet werden.

in der Makroökonomie, wo diese Kriterien kaum eine Rolle spielen. Aus diesem Grund ist Abschnitt 6 von besonderer Bedeutung. Insbesondere wäre es interessant zu untersuchen, ob bei den präferierten univariaten Filtern das in der Statistik bekannte Verzerrung-Varianz-Dilemma (“bias-variance trade-off”) auftritt. So kann der erwartete quadrierte Approximationsfehler  $\mathbb{E}(\widehat{T}_{Tt} - Y_t)^2$  in einen Bias- und einen Varianzterm zerlegt werden:

$$\mathbb{E}(\widehat{T}_{Tt} - Y_t)^2 = (\mathbb{E}\widehat{T}_{Tt} - Y_t)^2 + \mathbb{V}\widehat{T}_{Tt}.$$

Bei gegebener Güte der Approximation (linke Seite) kann eine Verringerung der Varianz (Randwertstabilität) nur durch eine gleichzeitige Erhöhung der Verzerrung erzielt werden.

Neben den interessanten Simulationen wäre es auch möglich, zumindest für den HP-Filter die Randwertstabilität, die durch  $\frac{d\widehat{T}_{TT}}{dY_T} = w_{TTT}$  gegeben ist, analytisch zu bestimmen.<sup>18</sup> Der Zusammenhang zwischen der Fensterbreite  $T$  und  $w_{TTT}$  könnte explizit gemacht werden, um so eine “optimale” Fensterbreite festzulegen. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 4.1 für den HP-Filter dargestellt.

Da diese Überlegungen zentral sind, müsste hier sowohl theoretisch als auch mittels Simulationen tiefer gebohrt werden. Nachdem Randwertinstabilität und Endpoint-Bias nicht vollständig eliminiert werden können, wäre das Ziel einer weitergehenden Analyse die verschiedenen Tradeoffs aufzuzeigen.

Das NAWRU-Konzept bildet die Grundlage für viele Ansätze, die auf der aggregierten Produktionsfunktion beruhen. Dies gilt insbesondere für die Methode der Europäischen Kommission, die international oft als Benchmark-Verfahren angesehen wird. Deshalb ist es bemerkenswert, dass der SBW-Bericht die Validität der Phillipskurve anzweifelt. Er tut dies, meiner Meinung nach, zurecht, doch sollten in diesem Zusammenhang weitere statistische Informationen (Spezifikation der Regression, Spezifikationstests, etc.) bereitgestellt werden, um die Glaubwürdigkeit der Schlussfolgerungen im SBW-Bericht zu erhöhen.

Alles in allem bietet der SBW-Bericht eine gute Übersicht über vielen Verfahren und deren praktische Relevanz im Hinblick auf die Finanzplanung. Er stärkt dabei zurecht im Wesentlichen die derzeitige Vorgangsweise mittels mHP(100).

---

<sup>18</sup>De Jong und Sakarya [6, Theorem 1] geben eine explizite Formel an. Nachdem die Fensterbreite mit 24 Jahren konstant bleibt, ist der entsprechende Koeffizient durch den entsprechenden Eintrag in der Matrix  $(I_{24} + \lambda S'S)^{-1}$  gegeben (siehe Gleichung (2.3)).

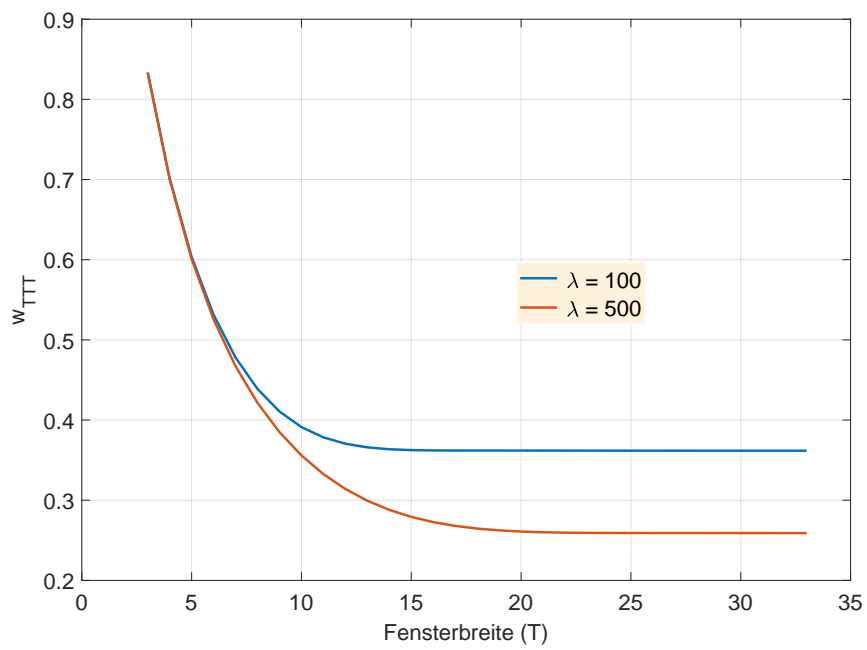


Abbildung 4.1: Randwertstabilität des HP-Filters

## 5 Vorschläge und Anregungen

Aus den Ergebnissen des SBW-Berichts und den in den vorherigen Abschnitten gemachten Kommentare lässt sich der Schluss ziehen, dass die “einfachen” eher statistisch ausgerichteten Filterverfahren die besten Resultate liefern. Hervorzuheben wären folgende drei Verfahren: das derzeit verwendete Verfahren mHP(100), lokale Kernregression (siehe Appendix X im SBW-Bericht und Bruchez und Schmassmann [5]) und Zustandsraummodelle mit einer Arbeitsmarktvariable und, wie vorgeschlagen, zusätzlicher irregulärer Komponente. Zu den letzten beiden Verfahren fehlen jedoch weitgehend praktische Erfahrungen. Diese könnten durch weitere Simulationen mit echten Daten ergänzt werden. So wäre es nützlich, die Performanz dieser Filter im Nachgang des wirtschaftlichen Einbruchs nach der Finanzmarktkrise zu untersuchen.

Diese Filter eignen sich besonders für die geplante Anwendung als Instrument in der Budget- und Finanzplanung, da sie neben einer guten statistischen Performanz transparent und praktikabel sind und so weitere wichtige Anforderungen erfüllen. Die modellbasierten Verfahren erscheinen vor diesem Hintergrund zu komplex und methodisch fragwürdig. Ausserdem müssen bei ihrer Implementierung viele Vorgaben in Bezug auf Daten, Hyperparameter und Modellierung gemacht werden, die einerseits im Detail kritisierbar und andererseits für Aussenstehende kaum nachvollziehbar sind.<sup>19</sup> Trotzdem sollte man diese Verfahren nicht ganz ad acta legen. Sie können *intern* zur ex-post Validierung verwendet werden und zu einem besseren ökonomischen Verständnis langfristiger Entwicklungen dienen.

Letztlich muss die rekursive Anwendung der Filter hinterfragt werden. Die Einbeziehung akzeptierter Prognose, etwa die des Staatssekretariats für Wirtschaft, in die Berechnungen auch am aktuellen Rand ist gängige Praxis und würde helfen, das Problem der Randwertinstabilität zu mildern.

Welches Verfahren man auch immer verwendet, der extrahierte Trend ist eine Funktion der Stichprobe und somit eine Zufallsgrösse. Aus diesem Grund sollte nicht nur der geschätzte Mittelwert ausgewiesen werden, sondern, zumindest für eine interne Evaluierung, auch die *geschätzte Standardabweichung*. Diese Berechnungen ist bei allen drei vorgeschlagenen Verfahren leicht möglich.

Die obigen Vorschläge sind allgemeiner Natur und beziehen sich nicht nur auf die derzeitige Corona-19-Pandemie. Es macht meiner Meinung nach keinen Sinn, die Methode nach der *subjektiven* Einschätzung der Auswirkungen der derzeitigen Situation auf das Trend-BIP auszuwählen. Stattdessen soll-

---

<sup>19</sup>Dies gilt auch für die Methode der EU-Kommission, die über die EXCEL-Interface zwar einfach zu haben ist, aber eine Black-Box darstellt. Die so erzielten Resultate sind daher kaum nachvollziehbar und interpretierbar.

te aus Gründen der Kontinuität die präferierte Methode adaptiert werden, um so der Einmaligkeit der derzeitigen Situation Rechnung zu tragen. Die oben vorgeschlagenen Anpassungen sind leicht zu implementieren und erlauben, die subjektive Einschätzung in eine transparente, nachvollziehbare und leicht kommunizierbare Anpassung umzusetzen.

## A Stationarität der zyklischen Komponente

In der praktischen Umsetzung wird der HP-Filters rekursiv mit fester Bandbreite von  $m = 24$  Jahre verwendet. Die geschätzte Trendkomponente  $\widehat{T}_t$  für den Zeitpunkt  $t$  berechnet sich daher wie folgt:

$$\widehat{T}_t = \sum_{s=0}^{m-1} w_s Y_{t-s} = w(L)Y_t, \quad t \geq m, \quad (\text{A.1})$$

dabei sind die Gewichte  $w_s$ ,  $s = 0, \dots, m-1$ , durch die letzte Zeile der Matrix  $(I_m + \lambda S' S)^{-1}$  gegeben, d.h.  $w_s = [(I_m + \lambda S' S)^{-1}]_{m, m-s}$ .  $w(L)$  stellt somit einen zeitinvarianten linearen Filter dar. Aufgrund der Überlegung in Abschnitt 2.1 gilt für diesen Filter:

$$\sum_{s=0}^{m-1} w_s = 1, \quad \text{und} \quad \sum_{s=0}^{m-1} w_s s = m-1, \quad t \geq m. \quad (\text{A.2})$$

Die geschätzte zyklische Komponente  $\widehat{C}_t$  ist definiert als:

$$\widehat{C}_t = Y_t - \widehat{T}_t = (1 - w_0)Y_t - \sum_{s=1}^{m-1} w_s Y_{t-s}, \quad t \geq m.$$

Die beiden Eigenschaften A.2 implizieren, dass eine Gerade  $a + bt$ ,  $t \geq m$ , durch den Filter in sich selbst überführt wird. Die zyklische Komponente ist in diese Fall gleich null. Ist  $\{Y_t\}$  ein integrierter Prozess der Ordnung eins<sup>20</sup> ist, d.h.  $Y_t \sim I(1)$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} \widehat{C}_t &= \left( \sum_{s=0}^{m-1} w_s - w_0 \right) Y_t - \sum_{s=1}^{m-1} w_s Y_{t-s} = \left( \sum_{s=1}^{m-1} w_s \right) Y_t - \sum_{s=1}^{m-1} w_s Y_{t-s} \\ &= \sum_{s=1}^{m-1} w_s (Y_t - Y_{t-s}) = \sum_{s=1}^{m-1} w_s (1 - L^s) Y_t = (1 - L) \sum_{s=1}^{m-1} w_s \sum_{j=0}^{s-1} L^j Y_t \\ &= (1 - L) \sum_{s=1}^{m-1} \tilde{w}_s Y_{t+1-s}, \end{aligned}$$

wobei  $\tilde{w}_s = \sum_{j=s}^{m-1} w_j$ . Da  $\sum_{s=1}^{m-1} \tilde{w}_s Y_{t+1-s}$  als endliche Summe integrierter Prozesse der Ordnung eins wiederum integriert der Ordnung eins ist, ist  $\{\widehat{C}_t\}$  stationär.

<sup>20</sup>Ein Prozess  $\{X_t\}$  heisst integriert der Ordnung eins,  $X_t \sim I(1)$ , falls  $\Delta X_t = \mu + \Psi(L)Z_t$  mit  $Z_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ ,  $\Psi(1) \neq 0$  und  $\sum_{j=0}^{\infty} j|\psi_j| < \infty$  (siehe Neusser [20]).

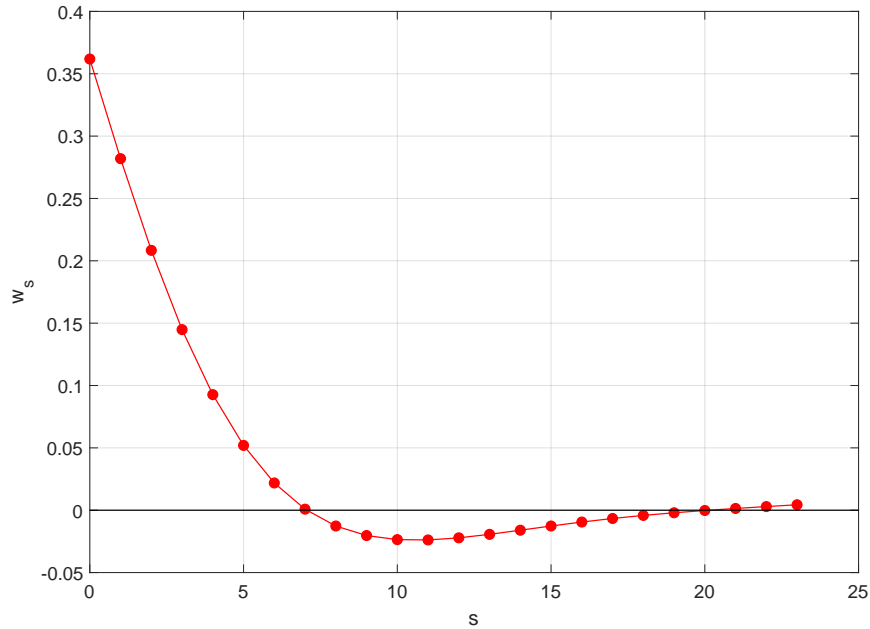


Abbildung A.1: Gewichte des rekursiv angewendeten HP-Filters ( $m = 24$ )

Abbildung A.1 stellt die Gewichte für  $m = 24$  graphisch dar.<sup>21</sup> Dabei kommt der aktuellen Beobachtung ( $s = 0$ ) ein Gewicht von 0.36 zu. Interessant ist, dass Beobachtungen, die mehr als sieben Perioden zurück liegen, ein negatives Gewicht erhalten.

---

<sup>21</sup>Für diese Betrachtung wurde auf die Modifikation zur Vermeidung der Randwertinstabilität verzichtet.



## Literatur

- [1] S. BASU AND J. G. FERNALD, *Returns to scale in U.S. production: Estimates and implications*, Journal of Political Economy, 105 (1997), pp. 249–283.
- [2] —, *What do we know (and not know) about potential output?*, Federal Reserve Bank of St. Louis Review, 91 (2009), pp. 187–213.
- [3] M. BAXTER AND R. G. KING, *Measuring business cycles: Approximate band-pass filters for economic time series*, Review of Economics and Statistics, 81 (1999), pp. 575–593.
- [4] P.-A. BRUCHEZ, *A modification of the HP-filter – Aiming at reducing the end-point bias*, Working Paper, Eidgenössische Finanzverwaltung, 2003.
- [5] P.-A. BRUCHEZ AND S. SCHMASSMANN, *Filtres linéaires univariés récursivement optimaux*. 2020.
- [6] R. M. DE JONG AND N. SAKARYA, *The econometrics of the Hodrick-Prescott filter*, Review of Economics and Statistics, 98 (2016), pp. 310–317.
- [7] EU INDEPENDENT FISCAL INSTITUTIONS, *A practitioner’s guide to potential output and output gap*, Report, EU Independent Fiscal Institutions.
- [8] EUROPEAN CENTRAL BANK, *The impact of COVID-19 on potential output in the euro area*, ECB Economic Bulletin 7, European Central Bank, 2020.
- [9] J. FAN AND Q. YAO, *Nonlinear Time Series*, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [10] J. D. HAMILTON, *Why you should never use the Hodrick-Prescott filter*, Review of Economics and Statistics, 100 (2018), pp. 831–843.
- [11] A. C. HARVEY, *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [12] —, *Time Series Models*, Harvester Wheatsheaf, New York, 1993.
- [13] A. C. HARVEY AND T. TRIMBUR, *Trend estimation and the Hodrick-Prescott filter*, Journal of Japan Statistical Society, (2008), pp. 41–49.

- [14] R. J. HODRICK AND E. C. PRESCOTT, *Postwar U.S. business cycles: An empirical investigation*, Journal of Money, Credit, and Banking, 29 (1997), pp. 1–16.
- [15] K. JÖNSSON, *Trend extraction with a judgement-augmented Hodrick-Prescott filter*, Empirical Economics, 39 (2010), pp. 703–711.
- [16] —, *Restricted Hodrick-Prescott filtering in a state space framework*, Empirical Economics, 53 (2017), pp. 1243–1251.
- [17] C.-J. KIM AND C. R. NELSON, *State-Space Models with Regime-Switching: Classical and Gibbs-Sampling Approaches with Applications*, MIT Press, Massachusetts, 1999.
- [18] S. LEIST AND K. NEUSSER, *Measuring the natural output level by DSGE models: An empirical investigation for Switzerland*, Swiss Journal of Economics and Statistics, 146 (2010), pp. 275–300.
- [19] K. S. NEISS AND E. NELSON, *Inflation dynamics, marginal cost, and the output gap: Evidence from three countries*, Journal of Money, Credit, and Banking, 37 (2005), pp. 1019–1045.
- [20] K. NEUSSER, *Time Series Econometrics*, Springer International Publishing, Switzerland, 2016.
- [21] A. ORPHANIDES, R. D. PORTER, D. REIFSCHNEIDER, R. TETLOW, AND F. FINAN, *Errors in the measurement of the output gap and the design of monetary policy*, Journal of Economics and Business, 52 (2000), pp. 117–141.
- [22] A. ORPHANIDES AND S. VAN NORDEN, *The unreliability of output-gap estimates in real time*, Review of Economics and Statistics, 84 (2002), pp. 569–583.
- [23] M. RAVN AND H. UHLIG, *On adjusting the HP-filter for the frequency of observations*, Review of Economics and Statistics, 84 (2002), pp. 371–376.
- [24] S. SCHMASSMANN, P.-A. BRUCHEZ, AND S. WIEDMER, *Analyse alternativer Verfahren zur Berechnung des Konjunkturfaktors*, tech. rep., Eidgenössisches Finanzdepartement, 2020.
- [25] P. ST-AMANT AND S. VAN NORDEN, *Measurement of the output gap: A discussion of recent research at the Bank of Canada*, Technical Report 79, Bank of Canada, 1997.

- [26] STAATSSSEKRETARIAT FÜR WIRTSCHAFT (SECO), *Konjunkturtendenzen Winter 2020/2021*, Report, Staatssekretariat für Wirtschaft (seco), 2020.
- [27] P. STALDER, *Univariate und multivariate Filter zur Schätzung des Potentialoutputs - Theorie und Anwendungen für die Schweiz*, Grundlagen für die Wirtschaftspolitik 10, Staatssekretariat für Wirtschaft SECO, Bern, 2020.