

Réponses aux questions relatives au rapport intitulé :

*Analyse alternativer Verfahren zur Berechnung des
Konjunkturfaktors, EFV/AFF*

Jean-Paul Renne, Université de Lausanne

17 janvier 2021

1 PRÉAMBULE : CRITÈRES POUR LE CALCUL DU PIB TENDANCIEL

Dans ce document, je réponds aux questions posées dans le document *Auftragsbeschrieb zum Gutachten zu alternativen Berechnungsmethoden des Trend-BIP für den Konjunkturfaktor* (EFV/AFF), daté du 2 décembre 2020. Les questions sont celles posées dans la note intitulée *Analyse alternativer Verfahren zur Berechnung des Konjunkturfaktors* (EFV/AFF), datée du 1er décembre 2020. Dans une première section, je rappelle les critères qui importent pour le calcul du PIB tendanciel dans le contexte de la politique budgétaire du gouvernement fédéral. Dans une seconde section, je donne mes réponses aux quatre questions. Des annexes contiennent des développements techniques qui sous-tendent mes réponses et mes suggestions.

1 Préambule : Critères pour le calcul du PIB tendanciel

[Extrait (traduit) du document *Auftragsbeschrieb zum Gutachten zu alternativen Berechnungsmethoden des Trend- BIP für den Konjunkturfaktor*]

Pour être utilisée dans la politique budgétaire, la méthode de calcul du PIB tendanciel doit répondre à certains critères. Deux critères sont fondés sur la Constitution :

1. **Prise en compte du cycle économique.** La politique budgétaire du gouvernement fédéral tient compte de la situation économique (art. 100 BV). L’alignement des dépenses sur les recettes corrigées des variations cycliques permet un développement régulier des dépenses et donc une politique budgétaire passive-anticyclique. Pour une politique budgétaire stable de la Confédération, il est également important que la volatilité du PIB tendanciel soit aussi faible que possible afin que le plafond des dépenses fluctue peu.
2. **Symétrie.** Les dépenses et les recettes doivent s’équilibrer dans le temps, de sorte que le gouvernement fédéral maintienne ses dépenses et ses recettes en équilibre dans le temps (selon l’article 126, paragraphe 1, de la Constitution fédérale).

Deux critères supplémentaires sont :

3. **Aspect pratique.** Dans le processus budgétaire, il y a peu de temps disponible pour les calculs. En conséquence, elles devraient être réalisables sans trop d’efforts. Toute prévision des variables d’entrée doit être disponible au moment du calcul.
4. **Transparence et faible manipulabilité.** La méthode doit être transparente et compréhensible par les tiers. En outre, le calcul devrait nécessiter le moins d’interventions ou d’hypothèses discrétionnaires possible, notamment pour éviter les accusations de manipulation.

2 Réponses aux questions posées

2.1 Evaluation des analyses et du rapport de l’AFF

Question 1. *Les analyses et le rapport couvrent-ils suffisamment tous les aspects pour permettre l’évaluation des différentes méthodes selon les critères ci-dessus ?*

Le rapport couvre de nombreux et importants aspects visant l’évaluation des différentes méthodes. De manière générale, la lecture du rapport est fluide : les aspects techniques sont clairement présentés et discutés, les annexes donnent des détails additionnels utiles. Le rapport expose clairement les principales limites de l’analyse. Dans la suite de cette réponse, après avoir rappelé l’organisation du rapport, je soulignerai deux de ces limites et proposerai des pistes d’amélioration.

Le rapport commence par décrire le contexte. Il poursuit en présentant les critères de choix du calcul du PIB tendanciel. Les différentes méthodes sont brièvement présentées dans une troisième partie. Les résultats sont présentés dans deux parties : alors que la partie 4 compare les performances qu’auraient donné les différentes méthodes sur les deux dernières décennies, la partie 5 met en oeuvre les différentes méthodes sur des données générées artificiellement. Une sixième partie étudie la pertinence du critère de Randwert-Instabilität. Les autres critères sont plus brièvement traités dans la section 7. La section 8 propose une short-list des méthodes candidates. La section 9 conclut. Les aspects techniques sont traités dans 12 annexes.

Une première limite est une limite de forme. Elle est liée aux deux addendums qui ne sont pas parfaitement intégrés dans le rapport du 1er décembre. Le premier concerne une nouvelle méthode univariée (OLUFHP, voir p.9 du rapport AFF) et la seconde concerne une nouvelle mesure de volatilité du PIB tendanciel (voir p.21 du rapport AFF). Ces deux extensions/discussions sont importantes. Il serait utile de mieux intégrer ces développements au rapport. En particulier, une réflexion sur la pertinence relative des deux mesures de volatilité—RSS Diff.-in-Diff. et St.Dev.Diff.— semble requise. Celle qui est pour l’instant mise en avant dans le rapport (volatilité des variations de la croissance du PIB tendanciel) semble moins directe que la nouvelle alternative proposée (volatilité de la croissance du PIB tendanciel)¹. Une première solution serait de considérer systématiquement

1. Formellement, en notant y_t^* le logarithme du PIB tendanciel, la première mesure concerne la variance de $\Delta(\Delta y_t^*)$ (où Δy_t^* est le taux de croissance du PIB tendanciel) et la seconde concerne directement la variance de Δy_t^* .

les deux mesures dans les analyses de performances des différentes méthodes. Une seconde solution serait de mettre en avant une seule des deux mesures après avoir vérifié que les deux mesures sont liées (comme le suggère l’annexe XII du rapport AFF et certains calculs présentés dans la présente réponse).

Une second limite concerne l’utilisation intensive d’un échantillon relativement court pour comparer les méthodes. De nombreux résultats sont établis sur une période de temps de moins de 20 années (2004-2019 en particulier). Alors que ces exercices sont utiles, voire nécessaires, il ne faut pas perdre de vue les limites de l’utilisation d’un horizon aussi court :

- l’Encadré 1 montre que, dans ce contexte, certains résultats sont sensibles aux données de PIB utilisées—notamment en ce qui concerne la moyenne de l’output gap. Ceci est illustré par la figure 2 ;
- l’Encadré 2 suggère que l’incertitude statistique associée aux mesures de performances sur petits échantillons est de nature à bruyier le classement des méthodes. Ceci est illustré par la figure 3.

Ces limites sont bien indiquées dans le rapport AFF (p.7), mais les principaux résultats du rapport semblent sur-pondérer les résultats de ces analyses par rapport aux résultats fondés sur données artificielles. Il est vrai que exercices menés sur données artificielles ne sont pas exempts de limites, en dépendant largement du choix du processus générateur de données (PGD). C’est pourquoi il convient de tester la robustesse de ces derniers au PGD retenus. A cet égard, la présente réponse propose une modélisation standard de la décomposition tendance-cycle du PIB qui peut être mise à profit dans le présent contexte (voir Encadré 3). Comme illustré dans la présente réponse, ce cadre de modélisation pourrait compléter l’analyse sur données artificielles menée dans la section 5 du rapport AFF. Ce cadre de modélisation proposé présente les avantages suivants :

- il prend explicitement en compte l’aspect stochastique du PIB tendanciel ;
- la modélisation est suffisamment maniable, de sorte que de nombreuses mesures de performance sont disponibles en formules fermées (les simulations de Monte-Carlo ne sont plus nécessaires) ;
- la modélisation peut facilement être modifiée pour prendre par exemple en compte l’existence de phénomènes rares et de grande ampleur, tels que l’arrivée du COVID (une telle extension est proposée) ;
- ces modèles sont parcimonieux (leur calibrage dépend d’un petit nombre de paramètres).

A titre d’illustration, la figure 4 montre comment les performances mesurées sur l’échantillon historique (2004-2019) sont modifiées dans les deux modèles théoriques (l’un sans désastres et l’autre

avec)². Cette figure montre que, concernant la mesure de volatilité du PIB tendanciel, le classement des méthodes peut changer lorsque l’on passe des performances mesurées sur données historiques aux performances théoriques calculées pour les deux PGD considérés³. En outre, pour les filtres considérés (HP, mHP et OLUFHP), il apparaît que les moyennes théoriques des output gaps sont égales à zéro. Ceci découle directement des propriétés de ces trois filtres ; plus précisément, cela provient du fait que ces trois filtres sont tels qu’ils laissent inchangés une tendance linéaire. Ce résultat est démontré dans l’annexe A de la présente réponse (voir Proposition 2). Cette annexe A comprend un certain nombre de résultats théoriques sur les filtres univariés⁴. Ces résultats théoriques pourraient venir compléter le rapport AFF en mettant en avant les propriétés particulièrement intéressantes des filtres univariés linéaires que sont les filtres HP, mHP et OLUFHP. Ils apporteraient aussi un éclairage sur certaines discussions. A titre d’exemple, l’encadré apparaissant sur les pages 19 et 20 du rapport AFF pourrait conclure avec l’idée que ce qui importe pour le critère de symétrie est que la distance du *cumul* des output gaps reste—à travers le temps—relativement proche de zéro (voir aussi ma discussion de la pertinence de cet indicateur de “dispersion du cumul des output gaps dans le temps” dans ma réponse à la question 2, p.14 du présent document, avant l’Encadré 4)^{5, 6}.

Encadré 1. Sensibilité des performances à la série de données de PIB

*Certains des résultats de la Figure 1 du rapport AFF ont été reproduits. Deux séries de PIB ont été utilisées (voir Figure 1 de la présente réponse). La première est extraite du site du SECO^a. La seconde série (*bip_r_y_sport*) est la série sur laquelle sont fondés les calculs du rapport AFF.*

2. Dans le modèle avec désastre, un choc négatif sur le PIB (ampleur moyenne du choc de 2.5%, écart-type 2.5%) a une probabilité de 1/25 d’arriver chaque année (paramètres p et γ_ω dans le tableau 4).

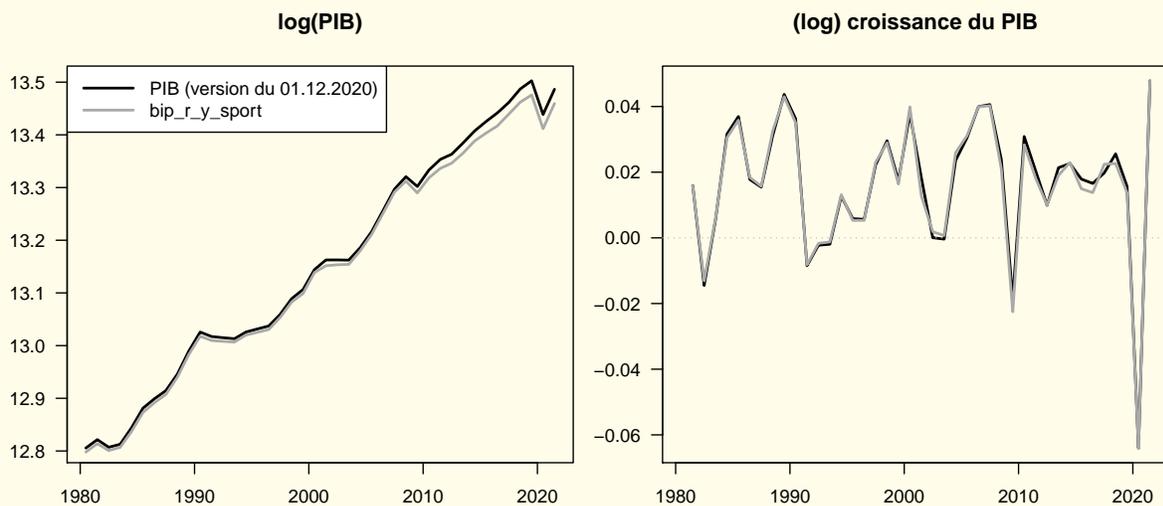
3. Ceci se traduit par le fait que les lignes se croisent parfois quand on passe des performances historiques aux performances théoriques.

4. Certains résultats de l’annexe A ont pour vocation principale la dérivation des différentes variances considérées pour mesurer les performances des approches (Annexe B).

5. D’un point de vue analytique, cette mesure est visée par le point (ii) de la Proposition 4 du document présent.

6. Dans la présente réponse, on se concentre sur les output gaps exprimés comme écarts entre le logarithme du PIB et de celui de sa tendance plutôt qu’en termes d’écarts entre les deux PIB en niveau (sans transformation logarithmique). L’Annexe D étudie l’influence de ceci. Il apparaît que, si l’on considère un filtre qui génère un cumul des output gaps (en log) stationnaire (voir Proposition 4 pour les conditions de ceci), alors le cumul des output gaps en niveau est également stable dans le temps.

La Figure 2 présente les résultats de cette analyse de sensibilité. Alors que les différences entre les deux séries de PIB sont minimales (voir Figure 1 de la présente réponse), les différences en termes de performances peuvent être substantielles (comparer pour cela la distance entre un symbole donné plein et sa contrepartie évidée). Les écarts peuvent être particulièrement grands pour la moyenne des output gaps (abscisses). Ceci est cohérent avec le calcul d’intervalles de confiance discuté dans l’Encadré 2.



Ces figures montrent deux séries de PIB. La première est extraite du site du SECO (PIB, approche par la production, données corrigées des effets des événements sportifs, [XLS, 247 kB, 01.12.2020](#)) prolongée en 2020 et 2021 à l’aide des [prévisions publiées le 16 juin 2020 par le SECO](#) (−6.2% pour 2020 et +4.9% pour 2021). La seconde série (*bip_r_y_sport*) est la série sur laquelle sont fondés les calculs du rapport.

FIGURE 1 – Les deux séries de PIB sous-jacentes aux performances montrées dans la Figure 2

a. Approche par la production, données corrigées des effets des événements sportifs, [XLS, 247 kB, 01.12.2020](#).

Encadré 2. Significativité statistique des performances sur horizon court

La Figure 1 du rapport AFF est fondée sur le calcul de moyennes incluant 14 ou 16 observations (14 pour la mesure de volatilité et 16 pour la moyenne des output gaps). Ce faible nombre de points implique que les moyennes empiriques sont des estimateurs peu précis des moyennes que l’on obtiendrait sur la “population” (si l’on disposait d’une très grande période de temps)^a.

Ceci est illustré par la Figure 3 ci-dessous. Pour quelques filtres, cette figure représente des

zones de confiance à 90% des performances. Ces zones sont grandes et se recourent, ce qui suggèrent que les positions relatives des performances calculées sur cet échantillon court sont assez incertaines.

a. A titre d’illustration, si l’on considère N tirages indépendants d’une variable aléatoire x de moyenne 0 et de variance 1, alors la probabilité d’obtenir une moyenne empirique $(1/N \sum_{i=1}^N x_i)$ inférieure à $-1/\sqrt{N}$ ou supérieure à $1/\sqrt{N}$ (au lieu de 0) est de 32%. Pour $N = 16$, cet interval est $[-0.25, 0.25]$. La probabilité d’obtenir une moyenne empirique distante de la “vraie” moyenne augmente si les x_i sont corrélés d’une date à l’autre, ce qui est typiquement le cas dans le contexte présent (les output gaps sont très auto-corrélés par exemple).

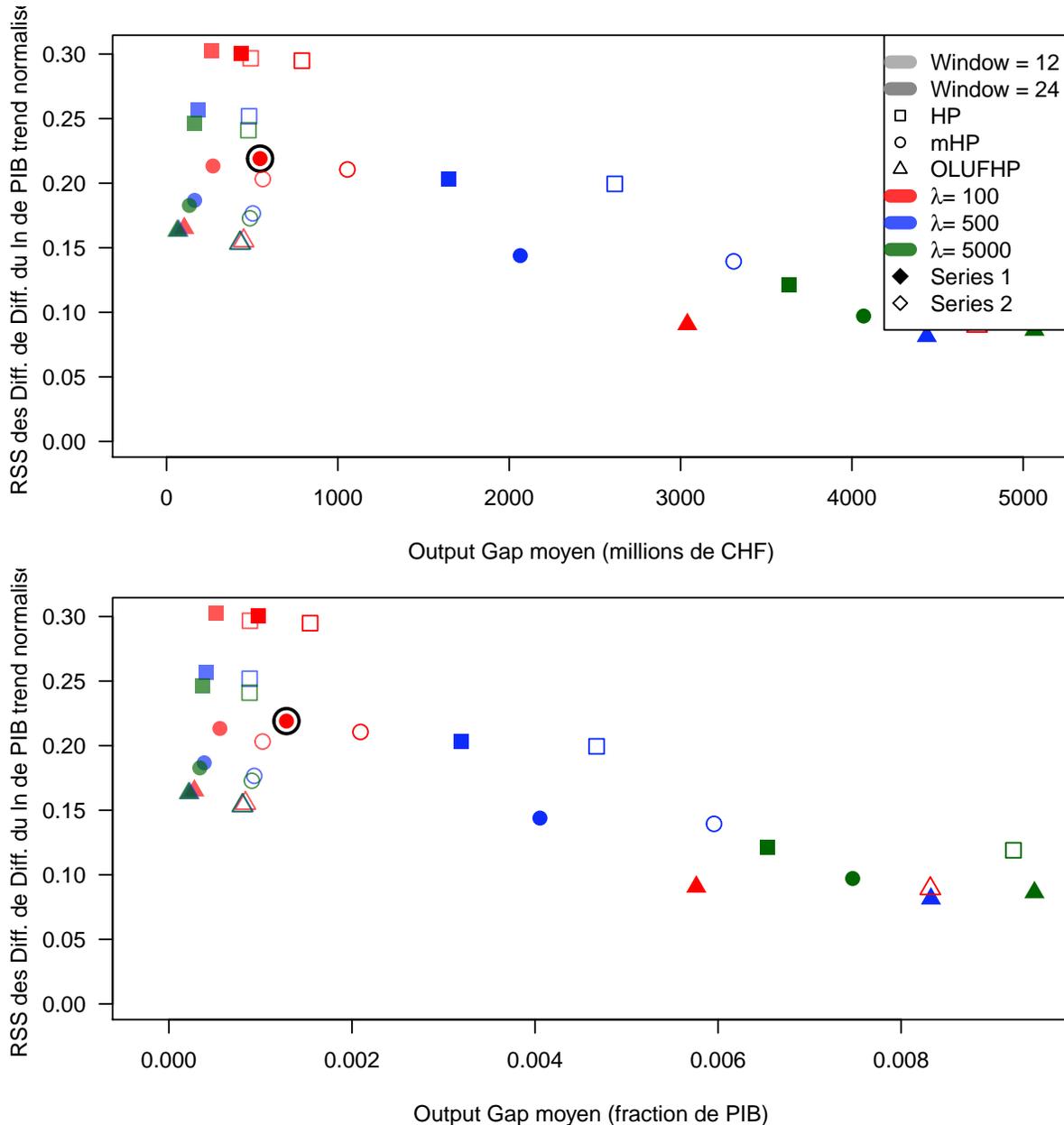
Encadré 3. Deux processus de génération de données

L’annexe B présente un cadre standard de modélisation jointe stochastique du PIB et du PIB tendanciel. Ce type de modélisation est par exemple utilisé par [Stock et Watson \(1988\)](#), [Lau-bach et Williams \(2003\)](#), [Mésonnier et Renne \(2007\)](#).

Ce modèle suppose que le taux de croissance du PIB tendanciel est stochastique et auto-corrélé dans le temps, de même que l’output gap. Il y a donc deux sources d’aléa dans ce modèle, l’une liée à la croissance potentielle, l’autre au cycle économique.

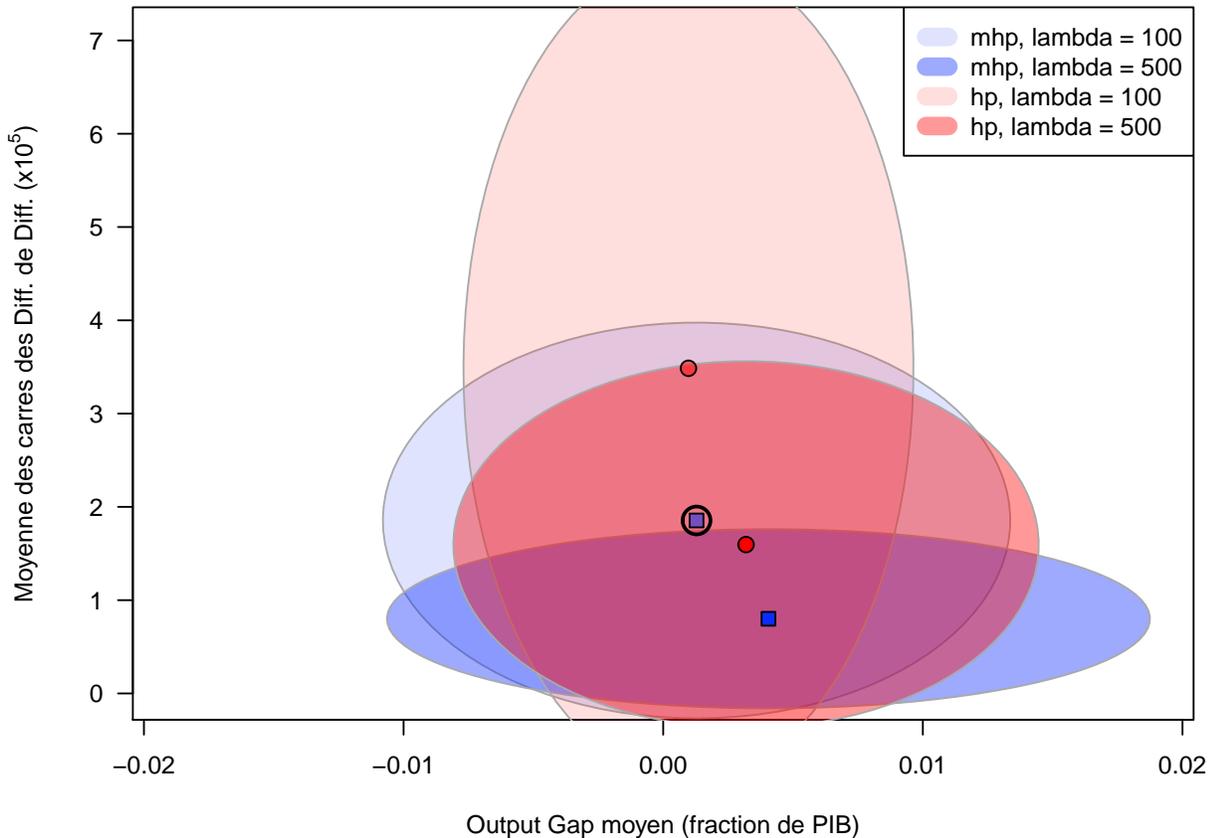
Ce modèle de référence, présenté dans la section B.1, est étendue dans la section B.2 pour prendre en compte l’existence de phénomènes rares pouvant avoir un important impact (négatif) sur le PIB. Le choc lié au COVID pourrait être un tel choc. L’annexe E explique comment, en pratique, les données de chômage partiel pourraient être reliées à la variable de désastre considérée dans le modèle.

L’annexe B.4 propose une méthode de calibrage de ces deux modèles. Les calibrations obtenues sont présentées dans les tableaux 3 et 4.



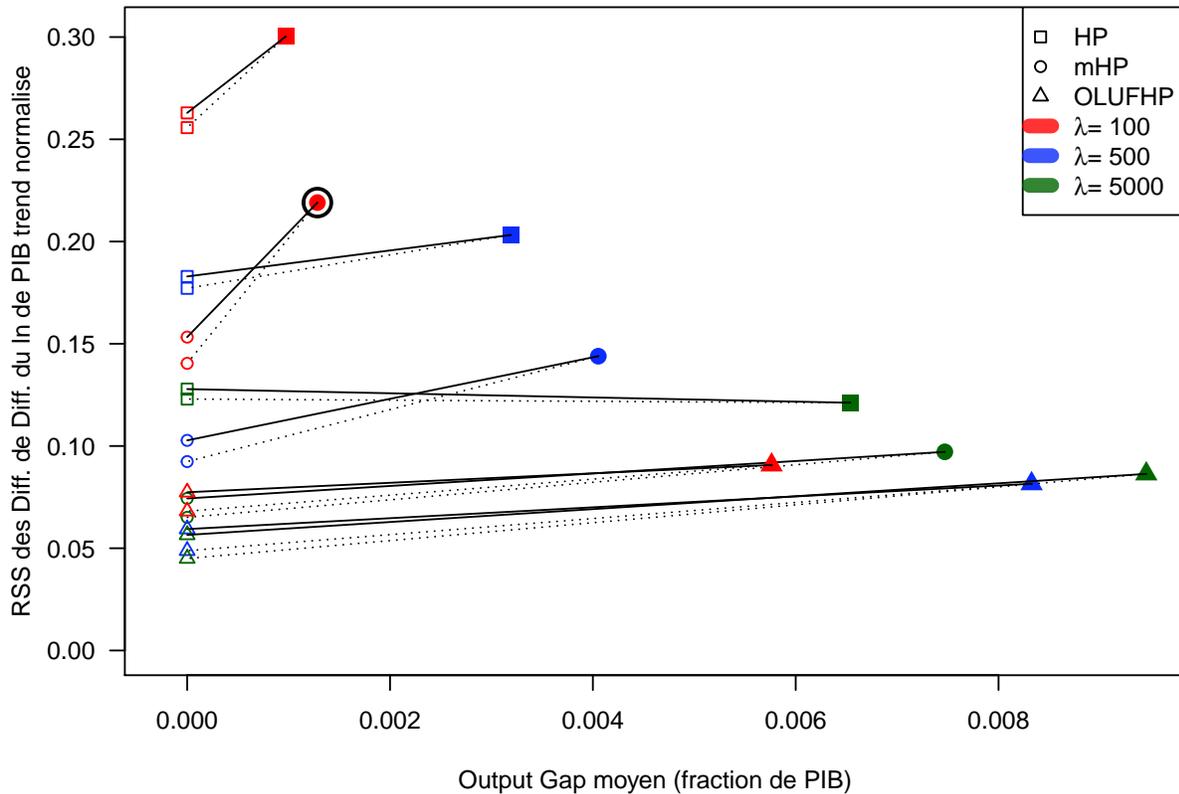
Notes : Cette figure réplique certains des résultats de la Figure 1 du rapport AFF mais utilise deux séries de PIB différentes (voir Figure 1). Les points remplis sont relatifs à la Série 1 (utilisée dans le rapport AFF), les symboles évidés sont relatifs à la Série 2. Les abscisses des points sont données par $\frac{1}{16} \sum_{t=2004}^{2019} GDP_t - GDP_t^*$ pour le graphique du haut et $\frac{1}{16} \sum_{t=2004}^{2019} \log GDP_t - \log GDP_t^*$ pour le graphique du bas; les ordonnées sont données par $\frac{1}{14} \sum_{t=2006}^{2019} \{\Delta \log GDP_t^*\}^2$ pour les deux graphiques, où $\log GDP_t^*$ est l’estimation du log du PIB potentiel fondé sur le filtre considéré, c’est-à-dire $GDP_t^* = \exp\{\theta(L) \log(GDP_t)\}$. Le point entouré d’un cercle noir correspond à mHP(100).

FIGURE 2 – Output gap moyen versus volatilité du PIB tendanciel (données historiques) : illustration de la sensibilité à l’échantillon retenu.



Notes : Cette figure illustre la sensibilité des performances à l’historique de données. Le point entouré d’un cercle noir est relatif à mHP avec $\lambda = 100$ et fenêtre de 24 ans. Les ellipses sont des intervalles de confiance à 90% du couple de performances (moyenne output gap, moyenne des carrés des Diff. de Diff.). La détermination de ces intervalles de confiance est fondée sur la formule de Newey-West (Annexe F), qui permet d’approcher l’écart-type de la moyenne empirique d’une séquence de données. Cette formule est appliquée : (a) aux output gaps en abscisse (la performance étant mesurée par $\frac{1}{16} \sum_{t=2004}^{2019} \log GDP_t - \log GDP_t^*$) et aux carrés des Diff. de Diff. en ordonnées (la performance étant mesurée par $\frac{1}{14} \sum_{t=2006}^{2019} \{\Delta\Delta \log GDP_t^*\}^2$). Le calcul des ellipses est fondé sur l’hypothèse selon laquelle $\{\Delta\Delta \log GDP_t^*\}^2$ et $\log GDP_t - \log GDP_t^*$ ne sont pas corrélés.

FIGURE 3 – Output gap moyen versus volatilité du PIB tendanciel : intervalles de confiance autour des performances empiriques (2004-2019)



Notes : Cette figure reprend certains des points de la figure 2. Les lignes en traits pleins (respectivement pointillées) relient ces points aux performances théoriques qui seraient observées sur un échantillon infini généré par le modèle décrit dans la section B.1 (respectivement la section B.2) avec le calibrage donné dans la table 3 (respectivement 4). Les output gaps moyens seraient égaux à zéro car ces filtres vérifient H1 (voir Proposition 3), le calcul des ordonnées de ces points théoriques (correspondant à la “population”) est fondé sur (a.29) pour le modèle de référence (section B.1) et par (a.38) pour le modèle incluant les désastres (section B.2). Le point entouré d’un cercle noir est relatif à mHP avec $\lambda = 100$ et fenêtre de 24 ans.

FIGURE 4 – Output gap moyen versus volatilité du PIB tendanciel (données historiques) : comparaison des performances empiriques avec celles (théoriques) obtenues dans deux modèles calibrés

2.2 Méthode préférée

Question 2. *Selon vous, laquelle des méthodes présentées répond le mieux aux critères ci-dessus et pourquoi ?*

- sur la base de l'ensemble des méthodes présentées ;
- sur la base de la liste restreinte suivante de la FFA :
 - Filtre mHP avec un facteur de lissage plus élevé et éventuellement une fenêtre de temps ajustée : voir le rapport.
 - Intégration du chômage partiel dans les filtres univariés (mHP, OLUFHP) : voir le chapitre 8 et l'annexe X du rapport.
 - Fonction de production classique : voir le rapport et [Stalder \(2020a\)](#).
 - Filtre multivarié : voir SSMoD dans le rapport et SS_URMOD dans [Stalder \(2020b\)](#).

Réponse synthétisée : *La méthode mHP, avec un facteur de lissage $\lambda = 500$, une fenêtre de 24 ans et la prise en compte (symétrisée) du Kurzarbeit, semble offrir un bon compromis concernant les critères de symétrie, de transparence, de prise en compte du cycle économique et de praticabilité. (Il convient toutefois de noter que, pour que la méthode soit tout à fait transparente, les données de Kurzarbeit devraient être publiquement disponibles.)*

L'analyse conduite p.59 du rapport AFF (partie 7) expose bien la faiblesse relative des approches par fonction de production (Classique et EK) en termes de praticabilité, de transparence et de faible manipulabilité. Concernant ces critères, cette partie aboutit assez clairement au classement suivant (où \succ signifie “plus performant que”) :

$$\text{Univarié} \succ \begin{matrix} \text{Multivarié} \\ \text{PF mHP} \end{matrix} \succ \text{PF simple} \succ \begin{matrix} \text{EK} \\ \text{Classique} \end{matrix} ,$$

ce qui amène à rejeter les approches par fonction de production classique et EK. L'approche PF simple utilise le NAWRU—dont la pertinence est mise en cause par la section 4.1.1 (p.23) du rapport AFF—sans présenter de gains clairs en termes de performances quantitatives, réduisant par là son intérêt.

En termes de symétrie, les filtres univariés (HP, mHP et OLUFHP) dominent. Le fait que leurs propriétés en termes de symétrie puissent être étudiées théoriquement (voir annexe A) est un avantage certain en la faveur de ces filtres. A l'inverse, les propriétés (notamment de symétrie) des approches

multivariées et, surtout, des approches par fonction de production—autres que celles se résumant essentiellement à des filtres univariés ou bivariés tels que *PFmhpKAE*—sont difficiles à étudier de façon générale.

Une propriété particulièrement intéressante des filtres univariés laissant inchangée une tendance linéaire (tels que HP, mHP et OLUFHP) est qu'ils garantissent que le *cumul* des output gaps est stationnaire si la croissance du PIB l'est (Proposition 3 de l'annexe A). Ceci est une propriété forte car, comme rappelé dans la note de bas de page 40 du rapport AFF, il est pourtant facile de faire diverger une somme infinie. De plus, la maniabilité de ces processus permet de déterminer les conditions à vérifier pour que la symétrie soit respectée lorsqu'une variable additionnelle de type désastre—dont le *Kurzarbeit* constituerait un instrument—est incluse dans le filtrage (voir Proposition 4). Cette condition simple sur les poids à donner à cette variable additionnelle permet de facilement intégrer celle-ci dans le calcul du PIB tendanciel, en conservant les propriétés de symétrie et la maniabilité calculatoire des filtres univariés⁷.

En utilisant davantage d'information, les filtres de type SS-X (*State Space*) pourraient en principe aboutir à une estimation plus précise du PIB potentiel. Cela serait même mécaniquement le cas si le modèle espace-état sous-jacent était bien spécifié—dans le sens où les équations sont parfaitement cohérentes avec le processus générateur de données—et si les paramètres du modèles étaient parfaitement estimés⁸. Mais différents arguments réduisent la pertinence de la ce type d'approche. Premièrement, comme mentionné plusieurs fois dans le rapport AFF, la minimisation de l'erreur d'estimation du PIB tendanciel n'est pas le critère le plus important dans le cadre de la procédure budgétaire concernée. Deuxièmement, l'ajout de variables dans le processus d'estimation peut aboutir à une plus grande volatilité du PIB tendanciel (voir bas de la p.4 du rapport AFF). Troisièmement, les propriétés (théoriques) de symétrie ne sont pas aussi systématiques avec cette approche que pour les filtres HP, mHP et OLUFHP⁹. Quatrièmement, bien que relativement facile

7. Même lorsqu'une telle correction (dans l'esprit de *PFmhpKAE*) est appliquée, beaucoup de calculs de performances restent accessibles en formules fermées, comme l'illustre la section B.2.

8. Si le modèle espace-état est linéaire et les chocs sont gaussiens, alors le filtre de Kalman, appliqué au bon modèle espace-état, est optimal dans le sens où il donne, en moyenne, les plus petites erreurs de filtrages (mises au carré) possibles.

9. En particulier, si l'estimation des paramètres c_i dans une équation de mesure du type $z_t = c_1 + c_2 gap_t + \varepsilon_t$ (voir Annexe IX p.104 du rapport AFF) est biaisée par rapport au vrai processus générateur des données, alors l'estimateur de gap_t issu de l'estimation des variables latentes (dont fait partie gap_t) par le filtre de Kalman serait aussi biaisé. De plus, le fait que les paramètres des modèles espace-état doivent être ré-estimés régulièrement rend difficile l'analyse théorique des propriétés de symétrie de cette approche.

d’emploi, la mise en oeuvre de cette approche reste moins directe que pour les filtres univariés. En particulier, cette mise en oeuvre requiert une optimisation numérique de la fonction de vraisemblance. Bien que les estimations passées semblent ne pas avoir rencontré de problème numérique, il est difficile de s’assurer que cela ne sera jamais le cas à l’avenir.

A ce stade, il semble que les méthodes univariées—potentiellement augmentées d’une variable externe, telle que le *Kurzarbeit* dans l’approche PfmhpKAE—soient préférables. Pour aller plus loin dans la comparaison des approches, on peut comparer les différentes performances de différents filtres univariés dans le cadre de nos deux modèles introduits dans l’Encadré 3. On rappelle que l’intérêt de ce cadre est qu’il permet de calculer les performances des approches sans que celles-ci soient conditionnelles à un échantillon particulier (mais elles sont alors conditionnelles à la spécification et au calibrage du modèle utilisé).

L’Encadré 4 explique comment lire les figures 5 à 8. Ces figures présentent différentes mesures de performances des filtres HP, mHP et OLUFHP. En se concentrant sur les résultats théoriques (indiqués par les symboles évidés sur les graphiques) associés aux deux modèles paramétriques (avec et sans désastres), on obtient les résultats suivants :

- (i) inclure une correction pour les désastres (dans l’esprit de *PFmhpKAE*, symétrisée) n’affecte que légèrement les différentes mesures de performances considérées (comparer par exemple pour cela la figure 5 et la figure 6) ;
- (ii) Pour un λ donné, on obtient les classements suivants (où \prec signifie “moins performant que”) :

$$HP \prec mHP \prec OLUFHP \text{ pour la variance du PIB tendanciel (ordonnées),}$$

$$OLUFHP \prec mHP \prec HP \text{ pour la variance des output gaps (abscisses);}$$
- (iii) les performances des différents filtres ne sont pas très éloignées des stratégies univariées optimales (courbes grises) ;
- (iv) une réduction de la fenêtre (passer de $q = 24$ à $q = 12$) entraîne une réduction importante de la variance des output gaps (abscisses), mais augmente la volatilité des PIB tendanciel (ordonnées) ;
- (v) pour chacun des trois types de filtres (HP, mHP et OLUFHP), augmenter le facteur de lissage de 100 à 500 entraîne une baisse notable de la volatilité du PIB tendanciel au coût d’une augmentation limitée de la variance de l’output gap.

Dans la mesure où une correction pour les désastres (symétrisée) permet de mieux prendre en

compte le cycle économique, et compte tenu de l'absence visible d'effets sur les performances exprimées en termes de variances (**résultat (i)**), la prise en compte des désastres—dans l'esprit de la méthode PfmhpKAE—semble pertinente. Par ailleurs, le **résultat (ii)** suggère que le filtre mHP propose un bon compromis entre variance du PIB tendanciel et celle de l'output gap. Le **résultat (iii)** suggère que les trois filtres univariés (HP, mHP et OLUFHP) sont de bons candidats, car proches des filtres optimaux (on rappelle ici que les filtres dits “optimaux” ne le sont que dans le cadre des modèles calibrés considérés). Les **résultats (iv) et (v)** impliquent que, si l'on donne plus d'importance à la volatilité du PIB tendanciel qu'à celle de l'output gap, alors (a) une fenêtre de temps de 24 années (versus 12 années) est préférable et (b) un facteur de lissage de $\lambda = 500$ est préférable à un facteur $\lambda = 100$. A cet égard, il convient de noter qu'une variance trop faible de l'output gap irait à l'encontre même du critère de prise en compte du cycle économique¹⁰. Toutefois, une variance exagérément grande du *cumul* des output gaps indiquerait un ratio dette-sur-PIB très fluctuant. Concernant ce dernier critère, il semble que les performances du filtre mHP, avec $\lambda = 500$ et $q = 24$, sont raisonnables : les figures 5 et 6 suggèrent que l'application de cette méthode impliquerait un écart-type du cumul des output gaps inférieur à 10% du PIB. Comme les recettes de la Confédération correspondent approximativement au dixième du PIB, il en découle que l'écart-type du ratio dette-sur-PIB présenterait un écart-type de 1 point de pourcentage.

Il convient de souligner que les résultats—au moins les résultats quantitatifs—montrés dans les figures 5 à 8 reposent sur les spécifications et les calibrations des deux modèles paramétriques (avec et sans désastres). Il serait utile d'étudier la robustesse de ces résultats, en particulier, aux calibrations retenues.

Encadré 4. Lecture des figures 5 à 8

Pour chaque approche considérée (HP, mHP, OLUFHP), ces figures donnent les performances suivantes :

- *Deux mesures liées à la symétrie (abscisses des points) : l'écart-type de l'output gap et l'écart-type de du cumul des output gaps.*
- *Deux mesures liées à la volatilité du PIB tendanciel (ordonnées des points) : l'écart-type des variations du PIB tendanciel (St. Dev. of Diff. dans le rapport AFF) et*

10. A la limite, un output gap constant et égal à zéro minimiserait ce critère mais correspondrait à une absence de prise en compte du cycle économique.

l'écart-type des variations de variations du PIB tendanciel (RSS Diff.-in-Diff. dans le rapport AFF).

	$q = 24$	$q = 12$
pas de correction pour les désastres ($\pi = 0$)	figure 5	figure 7
correction pour les désastres ($\pi = [1 \ -0.5 \ -0.5]$)	figure 6	figure 8

TABLE 1 – Spécificités de chacune des 4 figures

Le tableau 1 précise les différences entre les 4 figures : Pour les figures 5 et 6, on considère $q = 24$; pour les figures 7 et 8, on considère $q = 12$. Pour les figures 6 et 8, on applique une correction sur le log du PIB (y_t) avant d'appliquer le filtre (HP, mHP ou OLUFHP), dans l'esprit de PFMhpKAE. Plus précisément, on applique le filtre considéré à $y_t + D_t - 0.5D_{t-1} - 0.5D_{t-2}$ (et non à y_t , qui chute de D_t quand un désastre se matérialise). Comme indiqué dans l'annexe E, cette variable D_t peut être conçue comme αkae_t , où α est l'élasticité de la production au travail dans une fonction de production de type Cobb-Douglas et kae_t est, intuitivement, l'influence du chômage partiel sur la quantité de travail effective.

Sur les figures 5 à 8, les points représentés par des symboles remplis de couleur correspondent aux performances mesurées sur données historiques (2004-2019). Les segments en traits pleins (respectivement en pointillés) relient ces points aux performances théoriques (symboles évidés) qui seraient observées sur un échantillon infini généré par le modèle décrit dans la section B.1 avec le calibrage donné dans la table 3 (resp. le modèle avec désastres de la section B.2, calibré comme indiqué dans la table 4).

Comment sont calculées les performances théoriques ?

Le tableau suivant précise les formules utilisées pour le calcul des variances définissant les quatre performances considérées :

Mesure de performance (écarts-types)	figures 5 et 7		figures 6 et 8	
	no D	D	no D	D
Output gap	(a.31)	(a.40)	(a.45)	(a.45)
Cumul des output gaps	(a.7)	(a.7)	(a.7)	(a.7)
Variations du PIB tendanciel (St. Dev. of Diff.)	(a.25)	(a.37)	(a.42)	(a.42)
Variations de variat. du PIB tendanciel (RSS Diff.-in-Diff.)	(a.29)	(a.38)	(a.43)	(a.43)

TABLE 2 – Formules utilisées pour le calcul des performances théoriques (“D” : modèle avec désastres, “no D” : modèle sans désastre)

Que représentent les courbes grises en traits épais sur les figures 5 à 8?

Pour (a) un modèle calibré, (b) un couple de mesures de performances—par exemple variance de l’output gap et RSS Diff.-in-Diff.—, (c) une fenêtre q et (d) un paramètre de lissage λ , il existe un filtre optimal (c’est-à-dire une séquence $\{\theta_0, \dots, \theta_q\}$) minimisant une fonction de perte du type :

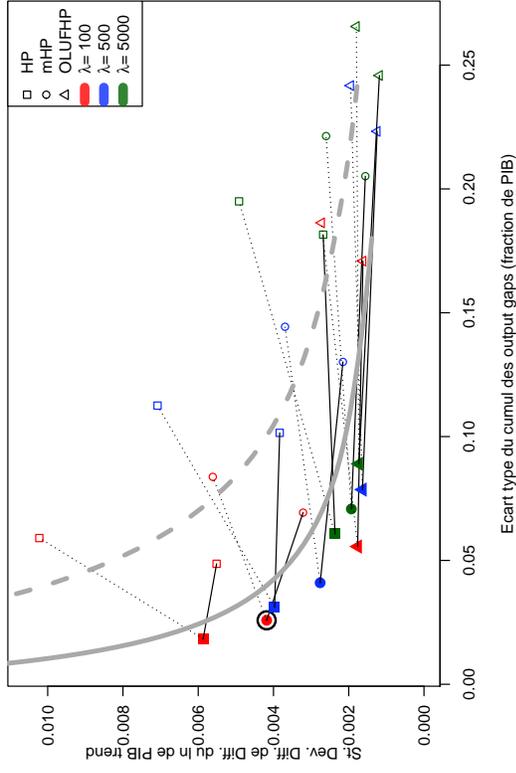
$$\text{Variance}_1(\theta) + \lambda \text{Variance}_2(\theta),$$

où Variance_1 et Variance_2 sont les deux mesures de performance considérées.

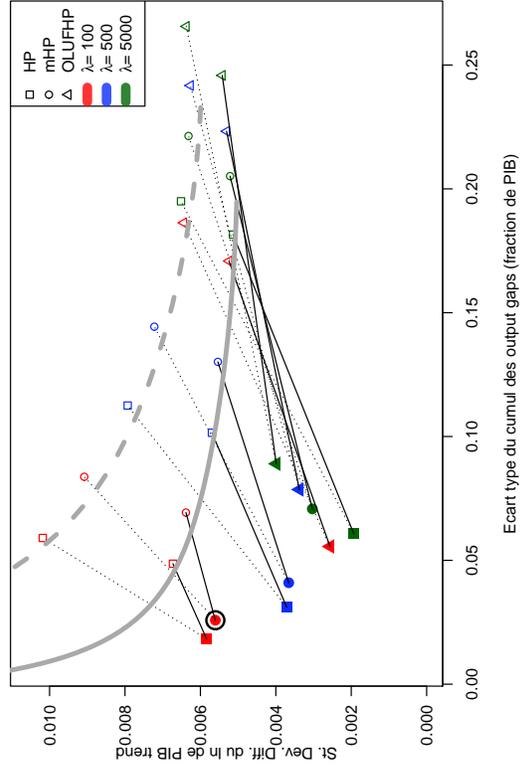
Pour un modèle (avec ou sans désastre), une fenêtre q et un couple de mesures de performances, les courbes grises en traits épais relient les performances optimales associées aux différentes valeurs de λ . Celles en trait plein (respectivement celles en pointillés) représentent les courbes optimales relatives au modèle sans désastre (resp. avec désastres).

Le calcul des filtres optimaux est détaillé par les Propositions 8 (pour le quadrant en haut à gauche de chaque figure) et Proposition 9 (pour le quadrant en haut à droite de chaque figure). Cette méthode s’étend aisément pour les deux quadrants du bas de chaque figure.

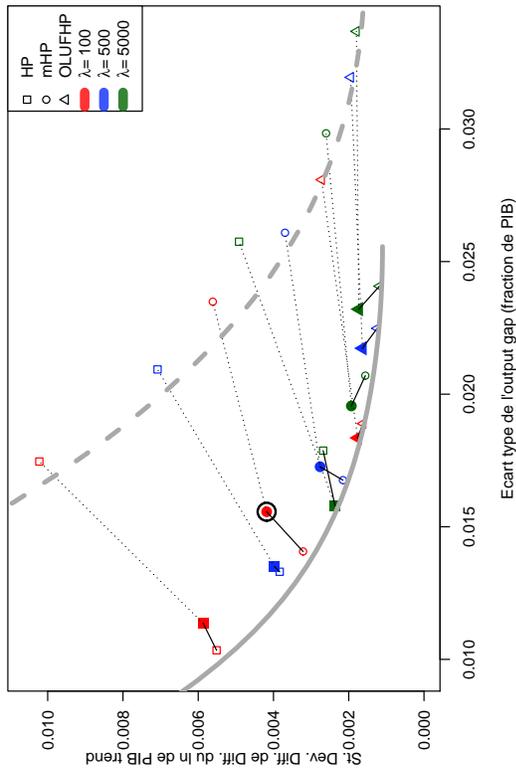
La figure 9 compare les valeurs des poids θ_i du filtre optimal (dans le cas où les critères sont : la variance du cumul des output gaps et la variance des variations de variations du PIB tendanciel, RSS Diff.-in-Diff.) aux poids d’autres filtres HP, mHP et OLUFHP, ainsi que ceux associés au filtre de Kalman (voir annexe G.2).



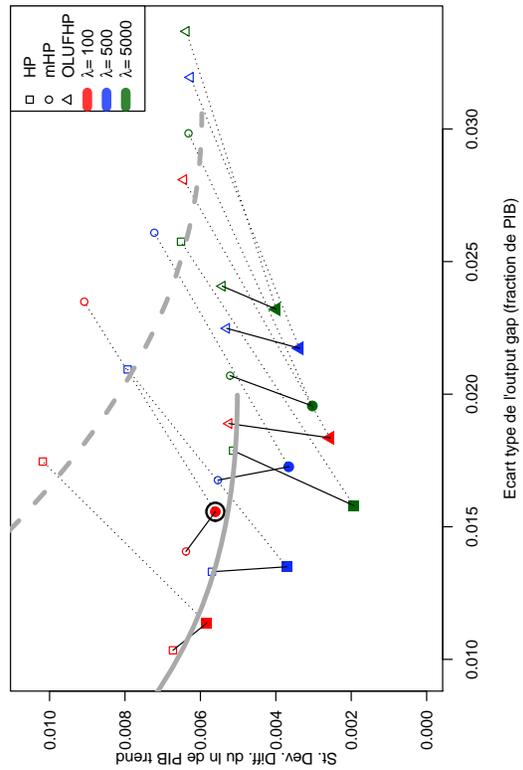
(b)



(d)

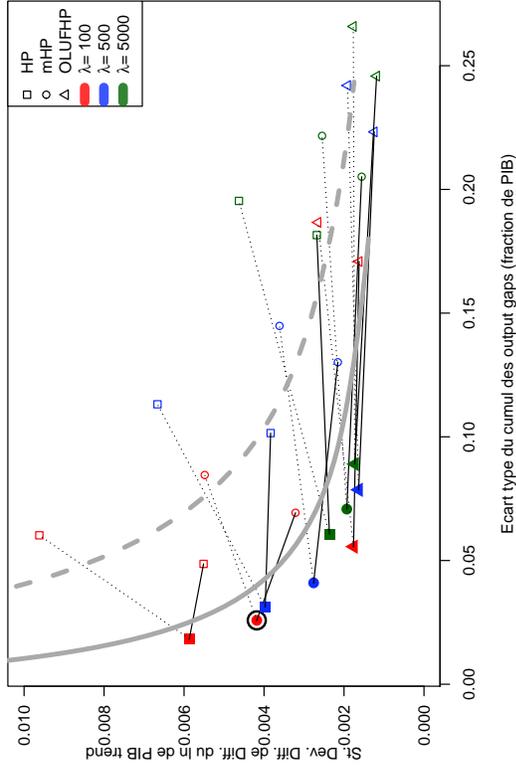


(a)

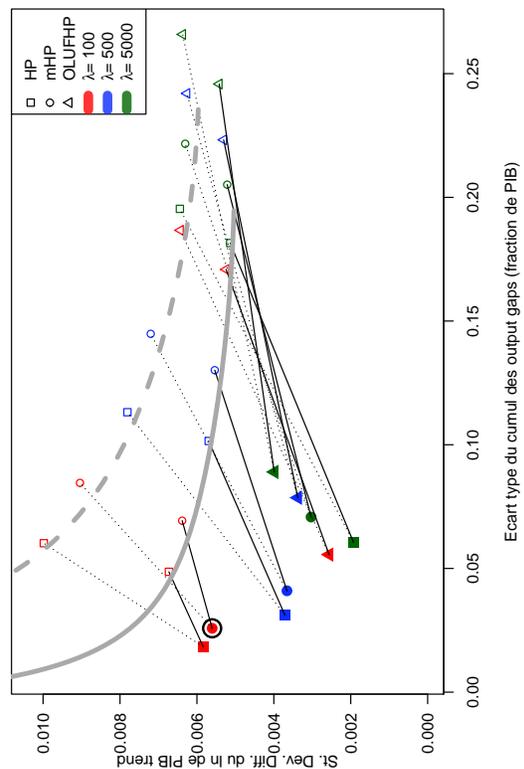


(c)

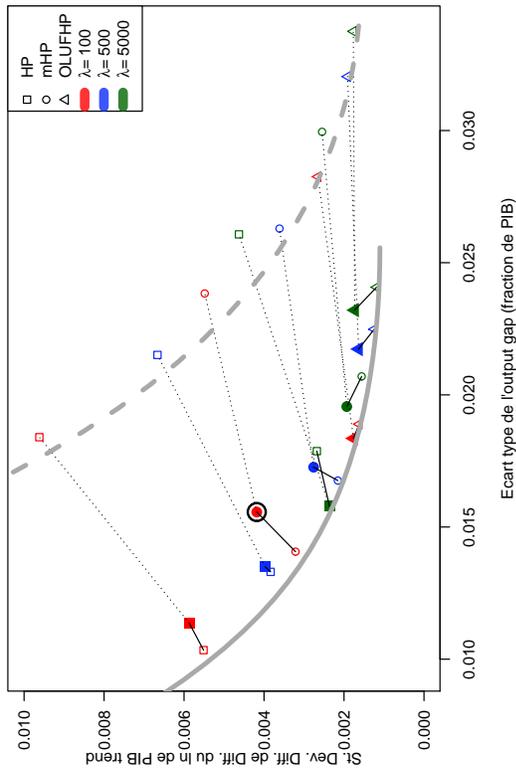
FIGURE 5 – Performances des filtres, $q = 24$ (voir Encadré 4)



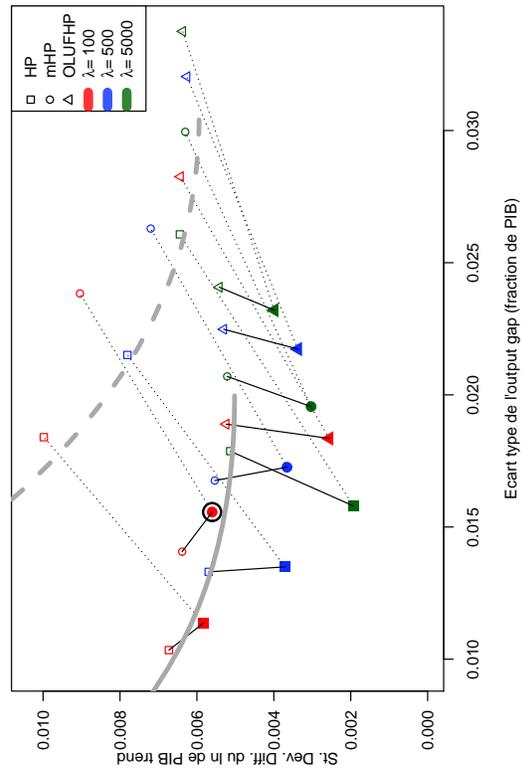
(a)



(b)

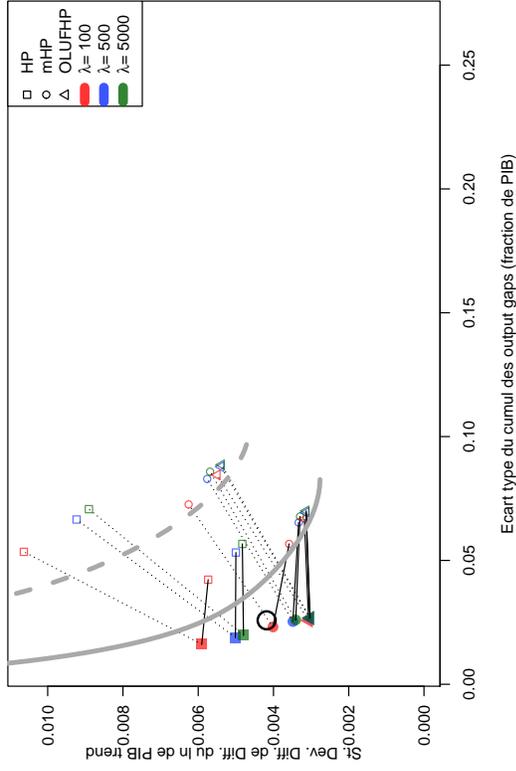


(c)

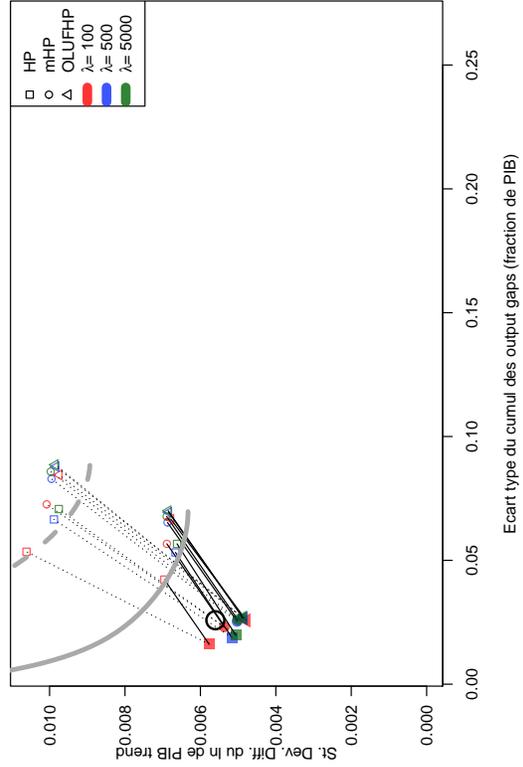


(d)

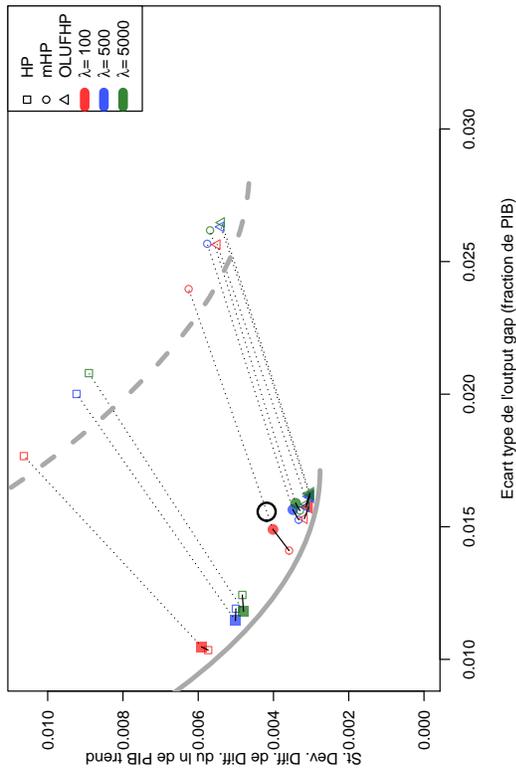
FIGURE 6 – Performances des filtres, $q = 24$, avec correction pour les désastres dans le filtrage (voir Encadré 4)



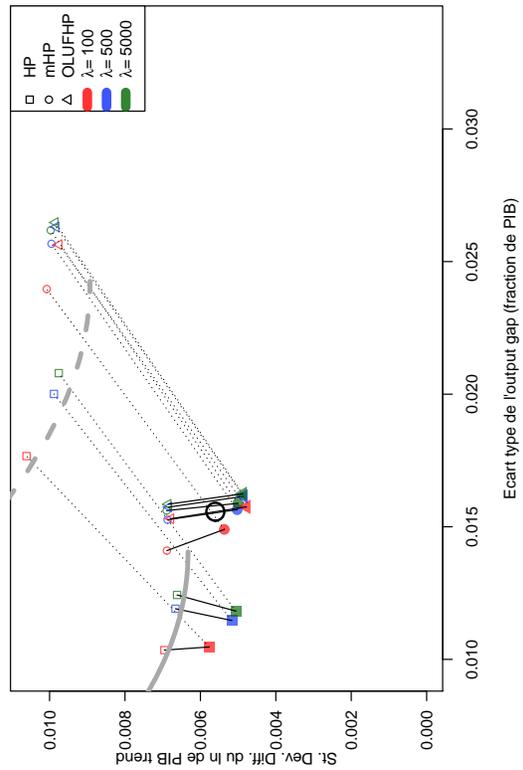
(b)



(d)

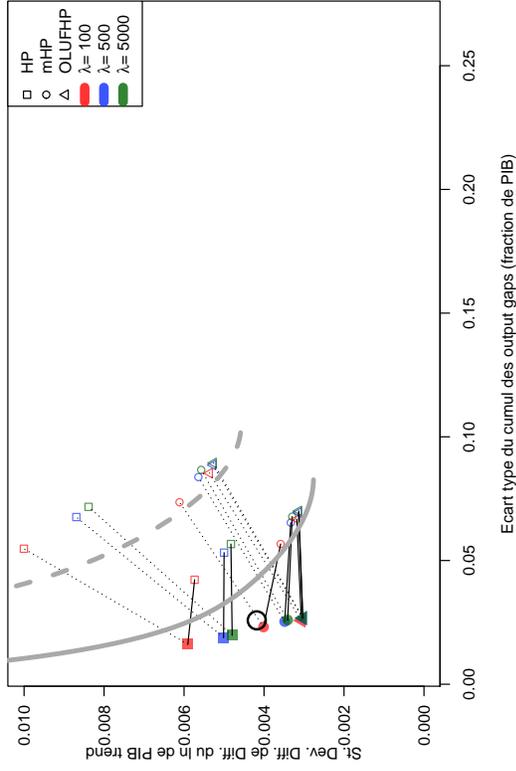


(a)

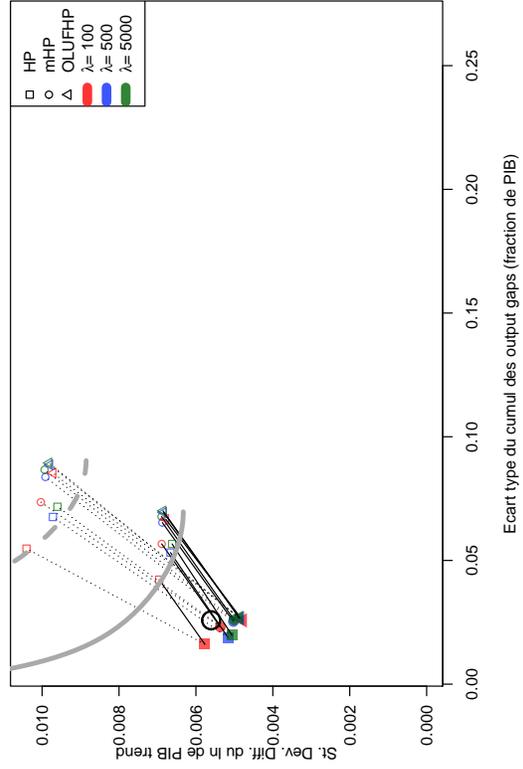


(c)

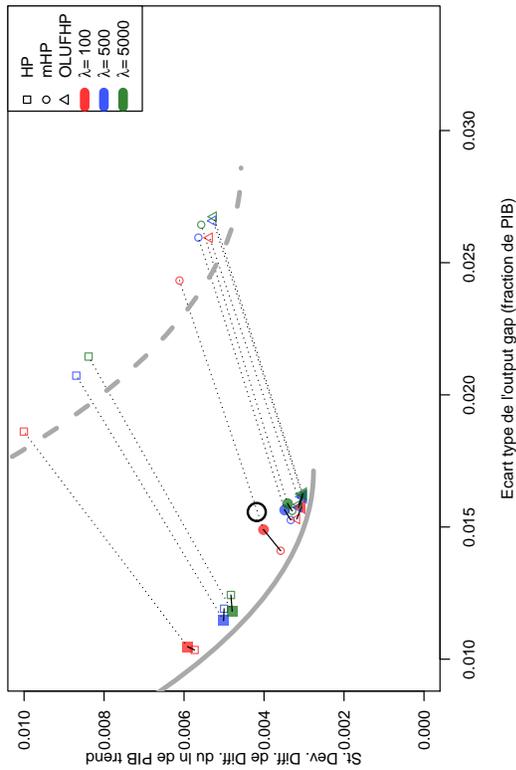
FIGURE 7 – Performances des filtres, $q = 12$ (voir Encadré 4)



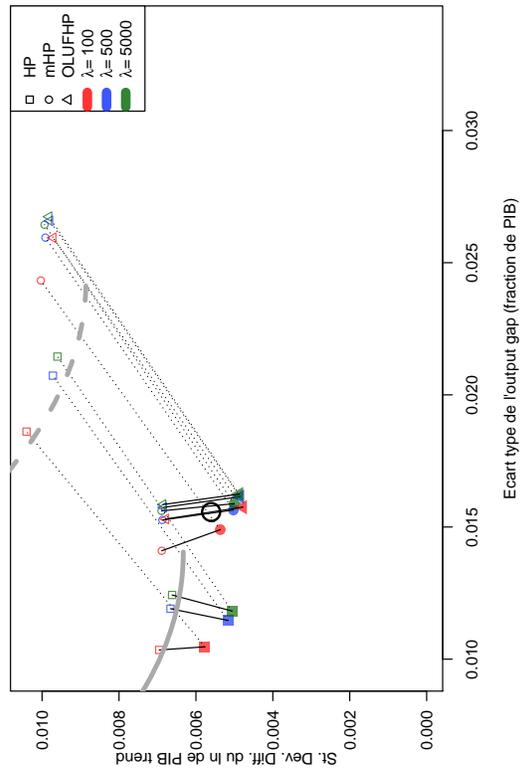
(a)



(b)

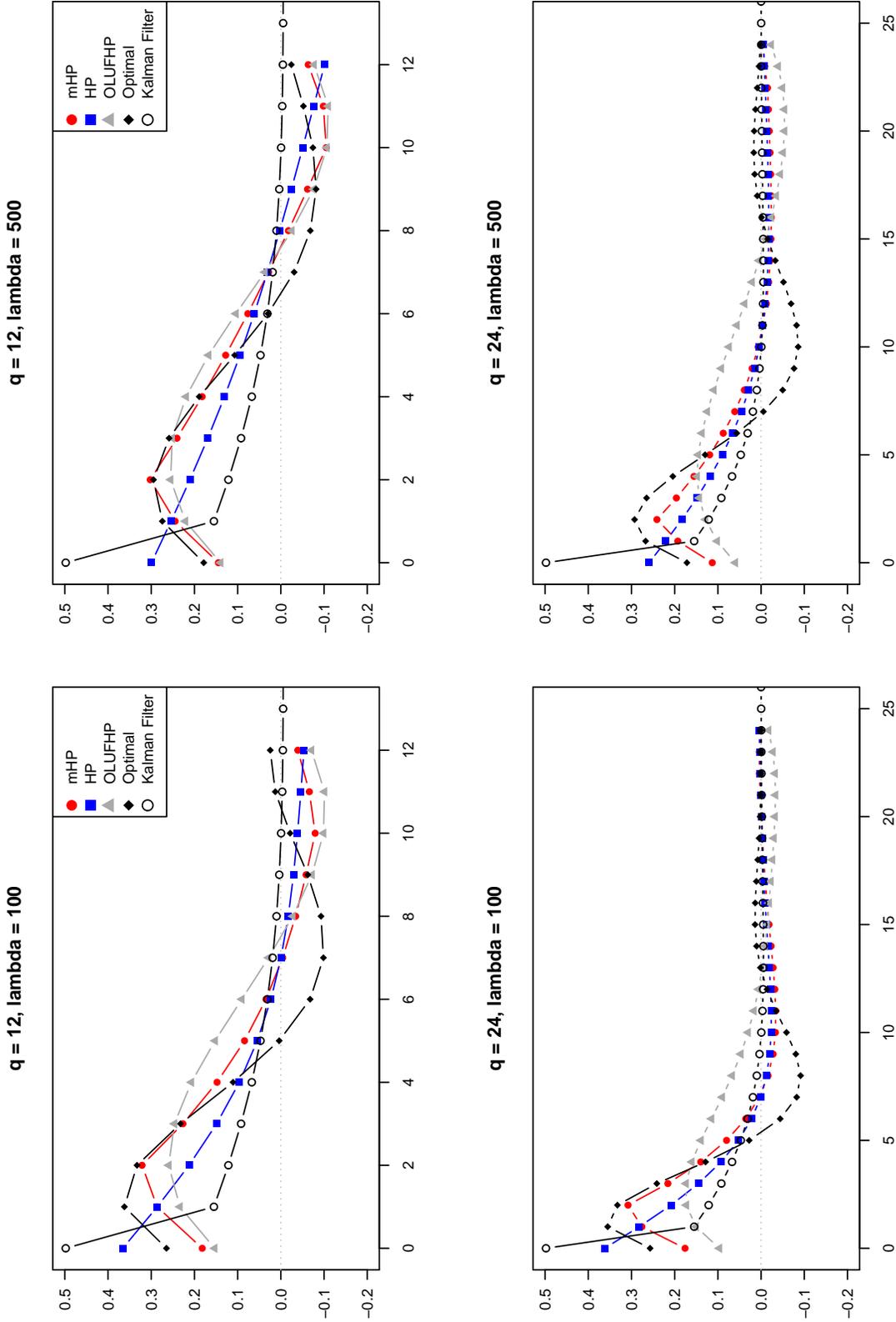


(c)



(d)

FIGURE 8 – Performances des filtres, $q = 12$, avec correction pour les désastres dans le filtrage (voir Encadré 4)



Notes : La fonction de perte sous-jacente au filtre dit "optimal" pondère la variance du cumul des output gaps et la variance des variations de variations du PIB tendanciel (RSS Diff.-in-Diff.), dans le cadre du modèle sans désastre décrit en B.1.

FIGURE 9 – θ pour différents filtres

2.3 Autres méthodes

Question 3. *Existe-t-il d'autres méthodes qui pourraient être utilisées pour calculer le PIB tendanciel ou la croissance potentielle et qui répondraient aux critères ci-dessus ? Une telle méthode doit être décrite (si nécessaire, joindre les calculs existants ou les références bibliographiques).*

La réponse à la question précédente introduit des filtres optimaux dans le cadre de modèles calibrés (voir fin de l'Encadré 4). Alors qu'ils ont essentiellement été utilisés comme des *benchmarks*, ces filtres pourraient aussi être employés directement pour estimer le PIB potentiel et la croissance potentielle. Néanmoins, il convient de rappeler que ces filtres sont optimaux uniquement sous l'hypothèse selon laquelle les modèles paramétriques calibrés (voir sections B.1, B.2, et B.4) représentent correctement le vrai processus générateur de données. A l'inverse, les filtres HP, mHP et OLUFHP optimisent des fonctions de pertes qui ne dépendent pas d'un modèle paramétrique particulier (voir Annexe B.4). A cet égard, le **résultat (iii)** de la réponse précédente est important car il montre que, bien que les filtres HP, mHP et OLUFHP sont construits pour optimiser un problème générique et pas exactement une fonction de perte fondée sur les variances de PIB tendanciel et d'output gap—qui ne peuvent être calculées que pour un modèle paramétrique donné—they présentent des performances relativement proches des filtres optimaux .

Il convient à nouveau de souligner que ces filtres optimaux ne sont “optimaux” que dans le contexte spécifique d'un modèle paramétrique calibré. Ils sont donc moins transparents et pratiques à mettre en oeuvre que les filtres HP, mHP et OLUFHP (notamment parce que ces derniers ne nécessitent pas de calibrage préliminaire d'un modèle paramétrique).

2.4 Lien entre Randwert-Instabilität et capacité à trouver la véritable tendance

Question 4. *Connaissez-vous des études qui établissent un lien entre Randwert-Instabilität et la capacité à trouver la véritable tendance (contrairement à la conclusion du chapitre 5.2.3)?*

Je ne connais pas d'étude étudiant ce point précis. Il me semble difficile d'établir un lien général entre Randwert-Instabilität et la capacité à trouver la véritable tendance. Les points développés dans la discussion des p.56 et 57 du rapport AFF sont pertinents.

Pour compléter cette discussion, l'analyse présentée dans l'Encadré 5 montre que, au moins dans le cas spécifique du modèle décrit en B.1, il est difficile de trouver une relation entre les deux performances que sont la Randwert-Instabilität et la capacité à trouver la véritable tendance. Cette analyse implique notamment le filtre de Kalman, qui présente l'intérêt d'être l'approche linéaire optimale en ce qui concerne la capacité à retrouver le PIB tendanciel. Les résultats de la figure 10 montrent que le filtre de Kalman n'est pas celui qui minimise le critère de Randwert-Instabilität parmi les filtres considérés (même en excluant les filtres purement récurrents, donnant mécaniquement un Randwert-Instabilität de 0).

Encadré 5. Randwert-Instabilität et capacité à trouver la véritable tendance

Une mesure de Randwert-Instabilität est la variance de la révision de l'estimation du PIB tendanciel avec l'arrivée de nouvelle information. Par exemple, pour une approche donnée, notons $y_{t,h}^$ l'estimation du (logarithme du) PIB tendanciel de la date $t - h$, cette estimation étant fondée sur l'information disponible en t uniquement. La mesure pré-mentionnée s'écrit alors :*

$$\text{Randwert-Instabilität}_h = \text{Var}(y_{t-h,0}^* - y_{t,h}^*), \quad (1)$$

car $y_{t-h,0}^$ est l'estimation du PIB tendanciel de la date $t - h$ vu de la date $t - h$ et $y_{t,h}^*$ est l'estimation du PIB tendanciel de la date $t - h$ vu de la date t .*

Par ailleurs, en notant \tilde{y}_t la vraie valeur du PIB tendanciel, une mesure de performance de la capacité à retrouver la véritable tendance (en supposant qu'on considère un filtre non-biaisé)

est :

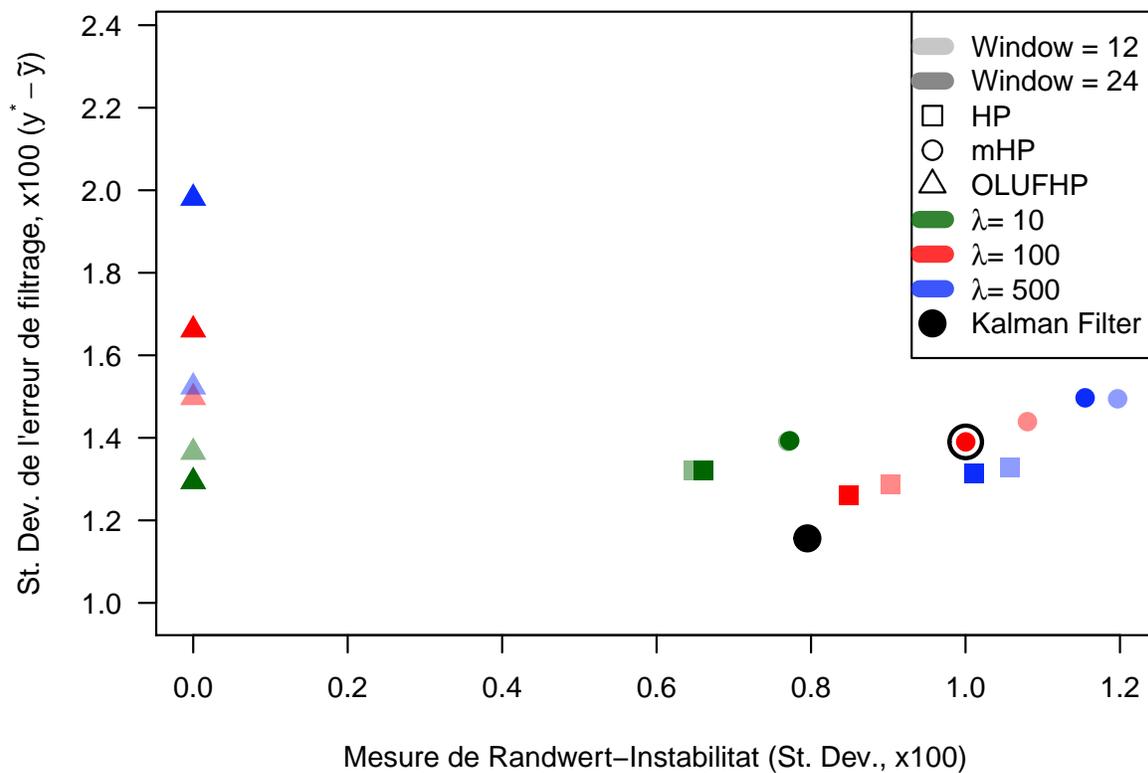
$$\text{Var}(\tilde{y}_t - y_{t,0}^*). \quad (2)$$

L'annexe **G** décrit le calcul des deux dernières mesures dans le cadre du modèle spécifié en **B.1**.

Il est important de noter que le modèle considéré est un modèle linéaire dont les sources d'aléa sont gaussiennes. Dans ce contexte, le filtre de Kalman est optimal pour retrouver le PIB potentiel (ou tendanciel), dans le sens où il donne une estimation non-biaisée et de variance minimale des variables non-observées (dont fait partie le PIB potentiel).

La figure **10** montre les performances de différents filtres (dont le filtre de Kalman) concernant les critères (1) et (2), pour $h = 5$. Naturellement, le filtre de Kalman est le meilleur concernant le critère de filtrage (axe des ordonnées). En revanche, il est par exemple battu par les filtres HP et mHP de paramètre $\lambda = 10$ concernant la mesure de Randwert-Instabilität.

Par ailleurs, en ligne avec le résultat du rapport AFF (section 6.2, p.54), on trouve que la mesure de Randwert-Instabilität est plus grande pour mHP que pour HP. Dans le cas étudié, il vient aussi que l'erreur de filtrage des filtres HP est un peu plus faible pour les filtres HP que mHP. Enfin, et naturellement, il apparaît que le filtre OLUFHP présente des mesures de Randwert-Instabilität égales à zéro puisque, étant purement récursif, il n'implique pas de révision des estimations passées du PIB potentiel ($y_{t-h,0}^* = y_{t,h}^*$).



Note : Les mesures de Randwert-Instabilität et d'erreurs de filtrage sont présentées dans l'Encadré 5 ($h = 5$ années). Ces mesures sont calculées dans le cadre du modèle décrit dans la section B.1, avec le calibrage indiqué dans le tableau 3.

FIGURE 10 – Randwert-Instabilität et erreurs de filtrage

Références

- BRUCHEZ, P.-A. (2003a). A Modification of the HP Filter Aiming at Reducing the End-Point Bias. Working Paper Doc. No. : ÖT/2003/3, Swiss Federal Finance Administration.
- BRUCHEZ, P.-A. (2003b). Will the Swiss Fiscal Rule Lead to Stabilization of the Public Debt? Working Paper Doc. No. : ÖT/2003/4, Swiss Federal Finance Administration.
- HODRICK, R. J. et PRESCOTT, E. C. (1997). Postwar U.S. Business Cycles : An Empirical Investigation. *Journal of Money, Credit and Banking*, 29(1):1–16.
- JORDÀ, O., SCHULARICK, M. et TAYLOR, A. M. (2016). Macrofinancial History and the New Business Cycle Facts. In *NBER Macroeconomics Annual 2016, Volume 31*, NBER Chapters, pages 213–263. National Bureau of Economic Research, Inc.
- KIM, C.-J. et NELSON, C. (1999). *State-Space Models with Regime Switching : Classical and Gibbs-Sampling Approaches with Applications*, volume 1. The MIT Press, 1 édition.
- LAUBACH, T. et WILLIAMS, J. C. (2003). Measuring the Natural Rate of Interest. *The Review of Economics and Statistics*, 85(4):1063–1070.
- MÉSONNIER, J.-S. et RENNE, J.-P. (2007). A Time-Varying Natural Rate of Interest for the Euro Area. *European Economic Review*, 51(7):1768–1784.
- NEWBY, W. K. et WEST, K. D. (1987). A Simple, Positive Semi-definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix. *Econometrica*, 55(3):703–08.
- STALDER, P. (2020a). Schätzung und Prognose des Potentialoutput auf Basis einer Produktionsfunktion - Theorie und Anwendung auf die Schweiz. Grundlagen für die Wirtschaftspolitik 9, Staatssekretariat für Wirtschaft SECO, Bern.
- STALDER, P. (2020b). Univariate und Multivariate Filter zur Schätzung des Potentialoutput - Theorie und Anwendungen auf die Schweiz. Grundlagen für die Wirtschaftspolitik 10, Staatssekretariat für Wirtschaft SECO, Bern.
- STOCK, J. H. et WATSON, M. W. (1988). Variable Trends in Economic Time Series. *Journal of Economic Perspectives*, 2(3):147–174.

— ANNEXES —

A Résultats généraux sur les filtres linéaires

Dans les annexes, on utilisera souvent l'opérateur retard L . Cet opérateur retard est tel que

$$Ly_t = y_{t-1}, \quad \text{et} \quad L^k y_t = y_{t-k}. \quad (\text{a.1})$$

On utilisera aussi la notation $\theta(L)$ pour un polynôme en l'opérateur retard, de sorte que :

$$\theta(L)y_t = \theta_0 y_t + \theta_1 Ly_t + \cdots + \theta_q L^q y_t = \theta_0 y_t + \theta_1 y_{t-1} + \cdots + \theta_q y_{t-q}.$$

Hypothèse H1. la séquence $\{\theta_0, \dots, \theta_q\}$ vérifie :

$$\sum_{i=0}^q \theta_i = 1 \quad (\text{a.2})$$

$$\text{et} \quad \sum_{i=0}^q i\theta_i = 0. \quad (\text{a.3})$$

Proposition 1. Un filtre linéaire univarié $y_t^* = \sum_{i=0}^q \theta_i y_{t-i}$ laisse inchangé une tendance linéaire si et seulement si la séquence $\{\theta_0, \dots, \theta_q\}$ vérifie l'Hypothèse **H1**.

Démonstration. Considérons une tendance linéaire $a + bt$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Cette tendance linéaire restera inchangée par le filtrage $\{\theta\}$ si et seulement si

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{i=0}^q \theta_i L^i \right\} (a + bt) = a + bt \quad \text{pour tout } t \\ \Leftrightarrow & \left(\sum_{i=0}^q \theta_i \right) a + b \sum_{i=0}^q \theta_i (t - i) = a + bt \quad \text{pour tout } t \\ \Leftrightarrow & \left(\sum_{i=0}^q \theta_i \right) a - \left(\sum_{i=0}^q i\theta_i \right) b + \left(\sum_{i=0}^q \theta_i \right) bt = a + bt \quad \text{pour tout } t. \end{aligned}$$

Le résultat s'obtient par identification. □

Proposition 2. Si (i) $\mathbb{E}(\Delta y_t) = \eta$ ne dépend pas du temps t , si (ii) la séquence $\{\theta_0, \dots, \theta_q\}$ vérifie l'Hypothèse **H1** et si (iii) $y_t^* = \sum_{i=0}^q \theta_i y_{t-i}$, alors on a :

$$\mathbb{E}(y_t^*) = \mathbb{E}(y_t).$$

A RÉSULTATS GÉNÉRAUX SUR LES FILTRES LINÉAIRES

Démonstration. On a :

$$\mathbb{E}(y_t^*) = \sum_{i=0}^q \theta_i \mathbb{E}(y_{t-i}) = \sum_{i=0}^q \theta_i (\mathbb{E}(y_t) - i\mathbb{E}(\Delta y_t)) = \left(\sum_{i=0}^q \theta_i \right) \mathbb{E}(y_t) - \eta \sum_{i=0}^q i\theta_i,$$

et le résultat résulte du fait que $\sum_{i=0}^q \theta_i = 1$ et $\sum_{i=0}^q i\theta_i = 0$ (Hypothèse **H1**). □

Lemme 1. Si la séquence $\{\theta_0, \dots, \theta_q\}$ satisfait (a.2) (c'est-à-dire si $\sum_{i=0}^q \theta_i = 1$, voir **H1**), alors

$$[1 - \theta(L)]y_t = y_t - \theta' \mathbf{y}_{t-q}^t = (B_q \theta)' (\mathbf{y}_{t-q+1}^t - \mathbf{y}_{t-q}^{t-1}),$$

où la matrice B_q , de dimension $q \times (q+1)$, est donnée par :

$$B_K = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{K \times (K+1)}. \quad (\text{a.4})$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} y_t - \theta' \mathbf{y}_{t-q}^t &= (\theta_0 y_t + \theta_1 y_t + \dots + \theta_q y_t) - (\theta_0 y_t + \theta_1 y_{t-1} + \dots + \theta_q y_{t-q}) \\ &= (\theta_1 (1-L) + \theta_2 (1-L^2) + \dots + \theta_q (1-L^q)) y_t \\ &= (\theta_1 (1-L) + \theta_2 (1-L)(1+L) + \dots + \theta_q (1-L)(1+L+\dots+L^{q-1})) y_t \\ &= ((\theta_1 + \dots + \theta_q) + (\theta_2 + \dots + \theta_q)L + \dots + \theta_q L^{q-1})(1-L) y_t, \end{aligned}$$

Le fait que

$$B_q \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_q \\ \theta_2 + \dots + \theta_q \\ \vdots \\ \theta_q \end{bmatrix}$$

donne le résultat. □

Lemme 2. Si les séquences $\{\theta_0, \dots, \theta_q\}$ et $\{\theta_0^*, \dots, \theta_q^*\}$ satisfont chacune (a.2) (c'est-à-dire si $\sum_{i=0}^q \theta_i = 1$ et $\sum_{i=0}^q \theta_i^* = 1$, voir **H1**), alors

$$\theta(L)y_t - \theta^*(L)y_{t-h} = (B_{q+h} \xi)' (\mathbf{y}_{t-q-h+1}^t - \mathbf{y}_{t-q-h}^{t-1})$$

où la matrice B_{q+h} , de dimension $(q+h) \times (q+h+1)$, est donnée par (a.4) et où la séquence

A RÉSULTATS GÉNÉRAUX SUR LES FILTRES LINÉAIRES

$\{\xi_0, \dots, \xi_{h+q}\}$ est telle que :

$$\begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{q+h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \vdots \\ \theta_q \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \theta_0^* \\ \vdots \\ \theta_q^* \end{bmatrix}.$$

Démonstration. On a :

$$\theta(L)y_t - \theta^*(L)y_{t-h} = [\theta(L) - \theta^*(L)L^h]y_t = [1 - \underbrace{(1 - \theta(L) + \theta^*(L)L^h)}_{=:\xi(L)}]y_t,$$

où $\xi(L)$ satisfait (a.2) si c'est le cas pour $\theta(L)$ et $\theta^*(L)$. Le résultat découle alors du Lemme 1. \square

Lemme 3. On a :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ y_{t-1} - y_t \\ \vdots \\ y_{t-q} - y_t \end{bmatrix} = B_q'(\mathbf{y}_{t-q+1}^t - \mathbf{y}_{t-q}^{t-1}),$$

où la matrice B_q , de dimension $q \times (q+1)$, est donnée par (a.4).

Démonstration. Le fait que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ y_{t-1} - y_t \\ y_{t-2} - y_t \\ \vdots \\ y_{t-q} - y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y_{t-1} - y_t \\ (y_{t-2} - y_{t-1}) + (y_{t-1} - y_t) \\ \vdots \\ (y_{t-q} - y_{t-q+1}) + (y_{t-q+1} - y_{t-q+2}) + \dots + (y_{t-1} - y_t) \end{bmatrix}$$

donne le résultat. \square

Lemme 4. Si la séquence $\{\theta_0, \dots, \theta_q\}$ satisfait HI, alors

$$(B_q \theta)' \mathbf{y}_{t-q+1}^t = (B_q \theta)' B_{q-1}' (\mathbf{y}_{t-q+2}^t - \mathbf{y}_{t-q+1}^{t-1}),$$

où la matrice B_q (respectivement B_{q-1}), de dimension $q \times (q+1)$ (respectivement $(q-1) \times q$), est donnée par (a.4).

A RÉSULTATS GÉNÉRAUX SUR LES FILTRES LINÉAIRES

Démonstration. En utilisant la décomposition suivante de \mathbf{y}_{t-q+1}^t :

$$\mathbf{y}_{t-q+1}^t = \begin{bmatrix} 0 \\ y_{t-1} - y_t \\ \vdots \\ y_{t-q+1} - y_t \end{bmatrix} + y_t \mathbf{1}_q,$$

on a :

$$(B_q \boldsymbol{\theta})' \mathbf{y}_{t-q+1}^t = (B_q \boldsymbol{\theta})' \begin{bmatrix} 0 \\ y_{t-1} - y_t \\ \vdots \\ y_{t-q+1} - y_t \end{bmatrix}, \quad (\text{a.5})$$

car l'Hypothèse **H1** (eq. **a.3**) implique que $(B_q \boldsymbol{\theta})' \mathbf{1}_q = 0$. On obtient alors le résultat en utilisant le Lemme **3**. \square

Proposition 3. Si Δy_t est stationnaire en covariance et si la séquence $\{\boldsymbol{\theta}_0, \dots, \boldsymbol{\theta}_q\}$ vérifie l'Hypothèse **H1**, alors la somme $\sum_{i=0}^t (y_i - y_i^*)$, où $y_i^* = \sum_{i=0}^q \boldsymbol{\theta}_i y_{t-i}$, est également stationnaire en covariance.

Démonstration. En utilisant le Lemme **1**, on obtient :

$$\sum_{i=0}^t y_t - y_t^* = \sum_{i=0}^t (B_q \boldsymbol{\theta})' (\mathbf{y}_{i-q+1}^i - \mathbf{y}_{i-q}^{i-1}) = (B_q \boldsymbol{\theta})' (\mathbf{y}_{t-q+1}^t - \mathbf{y}_{-q}^{-1}). \quad (\text{a.6})$$

Le Lemme **4** donne :

$$\sum_{i=0}^t y_t - y_t^* = (B_q \boldsymbol{\theta})' B_{q-1}' (\mathbf{y}_{t-q+2}^t - \mathbf{y}_{t-q+1}^{t-1}) - (B_q \boldsymbol{\theta})' B_{q-1}' (\mathbf{y}_{-q+1}^{-1} - \mathbf{y}_{-q}^{-2}).$$

Puisque Δy_t est stationnaire, c'est aussi le cas de $(\mathbf{y}_{t-q+2}^t - \mathbf{y}_{t-q+1}^{t-1})$, et donc de $\sum_{i=0}^t y_t - y_t^*$ par l'équation précédente. \square

Proposition 4. Si Δy_t et D_t sont stationnaires en covariance (avec $\mathbb{E}(D_t) \neq 0$), si la séquence $\{\boldsymbol{\theta}_0, \dots, \boldsymbol{\theta}_q\}$ satisfait **H1** et si $y_t^* = \boldsymbol{\theta}(L)(y_t + \boldsymbol{\pi}(L)D_t)$, avec $\boldsymbol{\pi}(L) = \sum_{j=0}^h \boldsymbol{\pi}_j L^j$, alors :

(i) le processus

$$\sum_{i=0}^t (y_i - y_i^*)$$

est stationnaire en covariance si et seulement si $\sum_{i=0}^h \boldsymbol{\pi}_i = 0$;

(ii) Si, de plus, $v_t := y_t + D_t$ et D_t sont indépendantes (c'est-à-dire si y_t admet la décomposition $v_t - D_t$, où v_t et D_t sont indépendantes) et si ces processus admettent des autocovariances absolument sommables^a, alors, pour t grand, la variance de la

somme des $y_t - y_t^*$ est approximativement :

$$\begin{aligned} & \mathbb{V}ar \left(\sum_{i=0}^t (y_i - y_i^*) \right) \\ & \approx 2\theta' B_q' B_{q-1}' \mathbb{V}ar(\mathbf{v}_{t-q+2}^t - \mathbf{v}_{t-q+1}^{t-1}) B_{q-1} B_q \theta + \\ & 2\theta' [B_{q,h}' - \Pi(B_h \boldsymbol{\pi}, q+1)] \mathbb{V}ar(\mathbf{D}_{t-q-h}^t) [B_{q,h}' - \Pi(B_h \boldsymbol{\pi}, q+1)]' \theta, \end{aligned} \quad (\text{a.7})$$

où les matrices B_{q-1} , B_q et B_h sont définies via (a.4), où

$$B_{K,h} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 \end{bmatrix}}_{(K+h) \times (K+1)}, \quad (\text{a.8})$$

et où la fonction Π associée à un vecteur $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_0, \dots, \gamma_h]'$ et à un entier K la matrice suivante :

$$\Pi(\boldsymbol{\gamma}, K) = \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_h & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_h & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_h \end{bmatrix}}_{K \times (K+h)}. \quad (\text{a.9})$$

a. Ceci constitue une hypothèse dite “de régularité”, elle signifie que la somme infinie des valeurs absolues des autocovariances de v_t et D_t existe et est finie ($\sum_{i=0}^{\infty} |\mathbb{E}([v_t - \mathbb{E}(v_t)][v_{t-i} - \mathbb{E}(v_t)])| < \infty$, et idem pour D_t). Cette hypothèse est automatiquement vérifiée pour les modèles standards de processus stationnaires autorégressifs de type AR (univarié) ou VAR (multivarié).

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} y_t - y_t^* &= y_t - \theta(L)y_t - \pi(L)\theta(L)D_t \\ &= y_t - \theta(L)y_t + \pi(L)(D_t - \theta(L)D_t) - \pi(L)D_t. \end{aligned}$$

D’après la Proposition 3, $(1 - \theta(L))[y_t + \pi(L)D_t]$ est stationnaire en covariance (puisque θ satisfait **H1** et $\Delta(y_t + \pi(L)D_t)$ est stationnaire). En conséquence, $\sum_{i=0}^t y_i - y_i^*$ est stationnaire si et seulement si $\sum_{i=0}^t \pi(L)D_i$ est stationnaire. En notant que $\mathbb{E}(\sum_{i=0}^t \pi(L)D_i) = \mathbb{E}(D_t) \sum_{i=0}^t (\sum_{j=0}^h \pi_j)$, il vient qu’une condition nécessaire pour que $\sum_{i=0}^t \pi(L)D_i$ soit stationnaire est que $\sum_{j=0}^h \pi_j = 0$. Si c’est le

A RÉSULTATS GÉNÉRAUX SUR LES FILTRES LINÉAIRES

cas, alors, en utilisant $\pi_0 = -\pi_1 - \pi_2 - \dots - \pi_h$, on a :

$$\begin{aligned}\pi(L)D_t &= (-\pi_1 - \pi_2 - \dots - \pi_h)D_t + \pi_1 D_{t-1} + \dots + \pi_h D_{t-h} \\ &= \{-\pi_1(1-L) - \pi_2(1-L^2) - \dots - \pi_h(1-L^h)\}D_t \\ &= \left\{-\pi_1 - \pi_2(1+L) - \dots - \pi_h(1+L+\dots+L^{h-1})\right\}(1-L)D_t,\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\pi(L)D_t = -(B_h \pi)'(\mathbf{D}'_{t-h+1} - \mathbf{D}'_{t-h}^{-1}), \quad (\text{a.10})$$

avec B_h défini par (a.4). Ceci implique notamment que

$$\sum_{i=0}^t \pi(L)D_i = -(B_h \pi)' \mathbf{D}'_{t-h+1} + (B_h \pi)' \mathbf{D}_{-h}^{-1},$$

qui est stationnaire car D_t l'est (par hypothèse). Ceci prouve (i).

Pour (ii), commençons par noter que :

$$\begin{aligned}y_t - y_t^* &= y_t - \theta(L)(y_t + \pi(L)D_t) = [1 - \theta(L)](y_t + D_t) - [1 - \theta(L)]D_t - \theta(L)\pi(L)D_t \\ &= [1 - \theta(L)]v_t - [1 - \theta(L)\{1 - \pi(L)\}]D_t,\end{aligned}$$

qui constitue une décomposition utile car $v_t := y_t + D_t$ et D_t sont des variables indépendantes sous les hypothèses de (ii).

En utilisant le Lemme 1, on a :

$$\sum_{i=0}^t [1 - \theta(L)] \underbrace{(y_i + D_i)}_{=v_i} = (B_q \theta)' B'_{q-1} (\mathbf{v}'_{t-q+2} - \mathbf{v}'_{t-q+1}^{-1}) - (B_q \theta)' B'_{q-1} (\mathbf{v}_{-q+1}^{-1} - \mathbf{v}_{-q}^{-2}).$$

Si la série des autocovariances de v_t est absolument sommable, alors la covariance entre $\mathbf{v}_{-q+1}^{-1} - \mathbf{v}_{-q}^{-2}$ et $\mathbf{v}'_{t-q+2} - \mathbf{v}'_{t-q+1}^{-1}$ tend vers 0 quand t devient grands. En conséquence, quand t est grand :

$$\text{Var} \left(\sum_{i=0}^t [1 - \theta(L)](y_i + D_i) \right) \approx 2\theta' B'_q B'_{q-1} \text{Var}(\mathbf{v}'_{t-q+2} - \mathbf{v}'_{t-q+1}^{-1}) B_{q-1} B_q \theta. \quad (\text{a.11})$$

Calculons maintenant la variance de $\sum_{i=0}^t [1 - \theta(L)\{1 - \pi(L)\}]D_i$. Commençons par noter que, par (a.10), on a $\pi(L)D_t = -(B_h \pi)'(\mathbf{D}'_{t-h+1} - \mathbf{D}'_{t-h}^{-1})$, ce qui implique :

$$\theta(L)\pi(L)D_t = -\theta' \Pi(B_h \pi, q+1)(\mathbf{D}'_{t-q-h+1} - \mathbf{D}'_{t-q-h}^{-1}), \quad (\text{a.12})$$

A RÉSULTATS GÉNÉRAUX SUR LES FILTRES LINÉAIRES

où Π est une fonction matricielle définie par (a.9). On a donc

$$\begin{aligned}
 [1 - \theta(L)\{1 - \pi(L)\}]D_t &= [1 - \theta(L)]D_t + \theta(L)\pi(L)D_t \\
 &= \underbrace{\theta' B'_q (\mathbf{D}_{t-q+1}^t - \mathbf{D}_{t-q}^{t-1})}_{\text{par Lemme (1)}} - \underbrace{\theta' \Pi(B_h \pi, q+1) (\mathbf{D}_{t-q-h+1}^t - \mathbf{D}_{t-q-h}^{t-1})}_{\text{par (a.12)}} \\
 &= \theta' [B'_{q,h} - \Pi(B_h \pi, q+1)] (\mathbf{D}_{t-q-h+1}^t - \mathbf{D}_{t-q-h}^{t-1}), \tag{a.13}
 \end{aligned}$$

où $B_{q,h}$ est défini par (a.8). En conséquence :

$$\sum_{i=0}^t [1 - \theta(L)\{1 - \pi(L)\}]D_i \approx \theta' [B'_{q,h} - \Pi(B_h \pi, q+1)] (\mathbf{D}_{t-q-h}^t - \mathbf{D}_{-q-h-1}^{-1}).$$

Si la série des autocovariances de D_t est absolument sommable, alors la covariance entre \mathbf{D}_{-q-h-1}^{-1} et \mathbf{D}_{t-q-h}^t tend vers 0 quand t devient grands. En conséquence, quand t est grand :

$$\mathbb{V}ar \left(\sum_{i=0}^t [1 - \theta(L)\{1 - \pi(L)\}]D_i \right) \approx 2\theta' [B'_{q,h} - \Pi(B_h \pi, q+1)] \mathbb{V}ar(\mathbf{D}_{t-q-h}^t) [B'_{q,h} - \Pi(B_h \pi, q+1)]' \theta,$$

ce qui prouve (ii). □

Proposition 5. Si la séquence $\{\theta_0, \dots, \theta_q\}$ satisfait (a.2) (i.e. $\sum_{i=0}^q \theta_i = 1$, voir HI) et si Δy_t est stationnaire en covariance, alors

$$\mathbb{V}ar(y_t - \theta(L)y_t) = \theta' B'_q \mathbb{V}ar(\mathbf{y}_{t-q+1}^t - \mathbf{y}_{t-q}^{t-1}) B_q \theta,$$

où la matrice B_q est donnée par (a.4).

Démonstration. Cela découle directement du Lemme 1 qui donne $y_t - \theta' \mathbf{y}_{t-q}^t = (B_q \theta)' (\mathbf{y}_{t-q+1}^t - \mathbf{y}_{t-q}^{t-1})$ sous (a.2). □

Proposition 6. Si Δy_t est stationnaire en covariance, alors :

$$\mathbb{V}ar((1-L)\theta(L)y_t) = \theta' \mathbb{V}ar(\mathbf{y}_{t-q}^t - \mathbf{y}_{t-q-1}^{t-1}) \theta.$$

Démonstration. On a $(1-L)\theta(L)y_t = \theta' (\mathbf{y}_{t-q}^t - \mathbf{y}_{t-q-1}^{t-1})$. □

Proposition 7. Si Δy_t est stationnaire en covariance, alors :

$$\mathbb{V}ar((1-L)^2 \theta(L)y_t) = \theta' \Omega_{q+2} \mathbb{V}ar(\mathbf{y}_{t-q-1}^t - \mathbf{y}_{t-q-2}^{t-1}) \Omega'_{q+2} \theta,$$

A RÉSULTATS GÉNÉRAUX SUR LES FILTRES LINÉAIRES

où Ω_{q+2} est donné par (a.17).

Démonstration. On a :

$$(1-L)^2\theta(L)y_t = \theta'(1-L)(\mathbf{y}_{t-q}^t - \mathbf{y}_{t-q-1}^{t-1}) = \theta'\Omega_{q+2}(\mathbf{y}_{t-q-1}^t - \mathbf{y}_{t-q-2}^{t-1}), \quad (\text{a.14})$$

ce qui donne le résultat. □

Avant de passer à la section suivante, nous introduisons une notation qui sera utilisée dans la suite. Nous noterons $\mathbf{1}_H^{i,j}$ le vecteur de dimension $H \times 1$ dont toutes les composantes sont nulles, sauf les éléments $i+1$ à $i+j$ qui sont égaux à 1. Formellement :

$$\mathbf{1}_H^{i,j} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} i \\ \left. \begin{array}{l} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right\} j \end{array} \right\} H \times 1. \end{array} \right. \quad (\text{a.15})$$

On introduit aussi la notation suivante :

$$\mathbf{y}_{t-q}^t = \begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-q} \end{bmatrix}. \quad (\text{a.16})$$

On utilisera aussi souvent les matrices Ω_K (de dimension $(K-1) \times K$), définies par :

$$\Omega_K = [\mathbf{Id}_{K-1} \quad \mathbf{0}_{(K-1) \times 1}] - [\mathbf{0}_{(K-1) \times 1} \quad \mathbf{Id}_{(K-1)}]. \quad (\text{a.17})$$

B Générateur de données aléatoires

Dans cette annexe, nous proposons un cadre standard permettant de générer des trajectoires de PIB réel et potentiel (et donc aussi d'écarts de production).

B.1 Modèle de référence

Le logarithme du PIB est noté y_t , celui du PIB potentiel est noté \tilde{y}_t , et l'écart de production c_t . (On a donc $c_t = y_t - \tilde{y}_t$.)

Les équations du modèle sont :

$$y_t = \tilde{y}_t + c_t \quad (\text{a.18})$$

$$c_t = \phi c_{t-1} + \varepsilon_t \quad (\text{a.19})$$

$$\tilde{y}_t = \tilde{y}_{t-1} + g_t \quad (\text{a.20})$$

$$g_t = \mu + \rho g_{t-1} + v_t, \quad (\text{a.21})$$

où les deux chocs v_t et ε_t sont gaussiens i.i.d., de moyennes nulles et de variances respectives σ_v^2 et σ_ε^2 . Il peut être utile d'écrire ce modèle sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} y_t \\ \tilde{y}_t \\ g_t \\ c_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \\ \mu \\ \mu \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & \rho & \phi \\ 0 & 1 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ \tilde{y}_{t-1} \\ g_{t-1} \\ c_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_t \\ \varepsilon_t \end{bmatrix}.$$

On considère une combinaison linéaire des q dernières valeurs de y_t (ce qui est le cas pour les filtres linéaires univariés) :

$$\Theta(L)y_t = (\theta_0 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q)y_t,$$

où L est l'opérateur retard (tel que $Ly_t = y_{t-1}$, et $L^k y_t = y_{t-k}$). Nous avons également :

$$\Theta(L)y_t = \underbrace{[\theta_0 \quad \theta_1 \quad \dots \quad \theta_q]}_{=: \theta'} \mathbf{y}_{t-q}^t,$$

où on utilise la notation (a.16) pour \mathbf{y}_{t-q}^t .

B.1.1 "St. Dev. of Diff" dans le modèle de référence

D'après la Proposition 6, la variance des variations annuelles du logarithme du PIB potentiel est donnée par :

$$\text{Var}[(1-L)\Theta(L)y_t] = \theta' \text{Var}(\mathbf{y}_{t-q}^t - \mathbf{y}_{t-q-1}^{t-1}) \theta. \quad (\text{a.22})$$

Il reste alors à expliciter $\mathbb{V}ar(\mathbf{y}_{t-q}^t - \mathbf{y}_{t-q-1}^t)$ dans le contexte de notre modèle. On a

$$y_t - y_{t-1} = g_t + c_t - c_{t-1}.$$

En utilisant le fait que les processus g_t et c_t sont indépendants, on obtient :

$$\mathbb{V}ar(\mathbf{y}_{t-q}^t - \mathbf{y}_{t-q-1}^t) = \Sigma_g^{(q)} + \Omega_{q+2} \Sigma_c^{(q+1)} \Omega'_{q+2}, \quad (\text{a.23})$$

où Ω_{q+2} est définie par (a.17) et où $\Sigma_g^{(q)}$ et $\Sigma_c^{(q+1)}$ sont les matrices d'autocovariances de g_t et c_t (c'est-à-dire $\mathbb{V}ar(\mathbf{g}_{t-q}^t)$ et $\mathbb{V}ar(\mathbf{c}_{t-q-1}^t)$), respectivement données par $\Sigma_g^{(q)}$ et $\Sigma_c^{(q+1)}$, avec, pour n'importe quel $K \geq 0$:

$$\Sigma_g^{(K)} := \frac{\sigma_v^2}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho^K \\ \rho & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \rho \\ \rho^K & \dots & \rho & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Sigma_c^{(K)} := \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2} \begin{bmatrix} 1 & \phi & \dots & \phi^K \\ \phi & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \phi \\ \phi^K & \dots & \phi & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{a.24})$$

Ensemble, les équations (a.22) et (a.23) donnent :

$$\boxed{\mathbb{V}ar[(1-L)\Theta(L)y_t] = \theta' \left(\Sigma_g^{(q)} + \Omega_{q+2} \Sigma_c^{(q+1)} \Omega'_{q+2} \right) \theta}, \quad (\text{a.25})$$

où $\Sigma_g^{(q)}$ et $\Sigma_c^{(q+1)}$ sont données par (a.24).

On pourra aussi noter que l'on a (en appliquant la dernière équation au cas spécifique $\Theta(L) = 1$, c'est-à-dire $q = 0$) :

$$\mathbb{V}ar[(1-L)y_t] = \frac{\sigma_v^2}{1-\rho^2} + \frac{2\sigma_\varepsilon^2}{1+\phi}. \quad (\text{a.26})$$

B.1.2 “RSS Diff-in-Diff” pour un filtre linéaire univarié dans le modèle de référence

D'après la Proposition 7, la variance de $\Delta\Delta(\Theta(L)y_t) = (1-L)^2\Theta(L)y_t$ est donnée par :

$$\mathbb{V}ar[(1-L)^2\Theta(L)y_t] = \theta' \Omega_{q+2} \mathbb{V}ar(\mathbf{y}_{t-q-1}^t - \mathbf{y}_{t-q-2}^{t-1}) \Omega'_{q+2} \theta, \quad (\text{a.27})$$

où Ω_{q+2} est définie par (a.17). En reprenant le raisonnement de la sous-section précédente (B.1.1), il vient :

$$\mathbb{V}ar(\mathbf{y}_{t-q-1}^t - \mathbf{y}_{t-q-2}^{t-1}) = \Sigma_g^{(q+1)} + \Omega_{q+3} \Sigma_c^{(q+2)} \Omega'_{q+3}, \quad (\text{a.28})$$

où $\Sigma_g^{(q+1)}$ et $\Sigma_c^{(q+2)}$ sont les matrices d'autocovariances de g_t et c_t (c'est-à-dire $\mathbb{V}ar(\mathbf{g}_{t-q-1}^t)$ et $\mathbb{V}ar(\mathbf{c}_{t-q-2}^t)$) dont le calcul est donné par (a.24). Ensemble, les équations (a.27) et (a.28)

donnent :

$$\mathbb{V}ar[(1-L)^2\Theta(L)y_t] = \theta' \Omega_{q+2} \left(\Sigma_g^{(q+1)} + \Omega_{q+3} \Sigma_c^{(q+2)} \Omega'_{q+3} \right) \Omega'_{q+2} \theta, \quad (\text{a.29})$$

où $\Sigma_g^{(q+1)}$ et $\Sigma_c^{(q+2)}$ sont données par (a.24).

On pourra aussi noter que l'on a (en appliquant la dernière équation au cas spécifique $\Theta(L) = 1$, c'est-à-dire $q = 0$) :

$$\mathbb{V}ar[(1-L)^2y_t] = 2 \frac{\sigma_v^2}{1+\rho} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2} (2\phi^2 - 8\phi + 6). \quad (\text{a.30})$$

B.1.3 Variance de $y_t - \theta(L)y_t$ sous H1 dans le modèle de référence

D'après la Proposition 5, et puisque $y_t - y_{t-1} = g_t + c_t - c_{t-1}$, on a

$$\mathbb{V}ar(y_t - \theta(L)y_t) = \theta' B'_q \left(\Sigma_g^{(q-1)} + \Omega_{q+1} \Sigma_c^{(q)} \Omega'_{q+1} \right) B_q \theta, \quad (\text{a.31})$$

où $\Sigma_g^{(q-1)}$ et $\Sigma_c^{(q)}$ sont définies par (a.24), où B_q est donnée par (a.4), et où Ω_{q+1} (de dimension $q \times (q+1)$) est donnée par (a.17).

B.1.4 Variance de l'erreur de filtrage $\tilde{y}_t - \theta(L)y_t$

Si $\theta(L)y_t$ est perçu comme un estimateur de \tilde{y}_t , alors $\tilde{y}_t - \theta(L)y_t$ est l'erreur de filtrage associé au filtre défini par $\theta(L)$. On a :

$$\tilde{y}_t - \theta(L)y_t = \tilde{y}_t - \theta(L)\tilde{y}_t - \theta(L)c_t,$$

et puisque \tilde{y}_t et c_t sont des variables indépendantes, il vient que

$$\mathbb{V}ar(\tilde{y}_t - \theta(L)y_t) = \mathbb{V}ar(\tilde{y}_t - \theta(L)\tilde{y}_t) + \mathbb{V}ar(\theta(L)c_t).$$

La première des variances apparaissant à droite de l'équation précédente est donnée par (a.31) en posant $\Sigma_c^{(q)} = 0$; la variance de $\theta(L)c_t$ est donnée par $\theta' \Sigma_c^{(q)} \theta$. En conséquence :

$$\mathbb{V}ar(\tilde{y}_t - \theta(L)y_t) = \theta' \left(B'_q \Sigma_g^{(q-1)} B_q + \Sigma_c^{(q)} \right) \theta. \quad (\text{a.32})$$

B.2 Extension du modèle pour inclure des désastres

L'équation (a.18) est remplacée par :

$$y_t = \tilde{y}_t + c_t - D_t, \quad (\text{a.33})$$

où la variable D_t , qui correspond à un désastre, est tirée de façon indépendante à chaque période. Plus précisément, on suppose que D_t est le produit de deux variables i.i.d. :

$$D_t = \omega_t d_t, \quad (\text{a.34})$$

où

$$d_t \sim i.i.d. \mathcal{B}(p),$$

c'est-à-dire $d_t = 1$ avec probabilité p et $d_t = 0$ avec probabilité $1 - p$ (c'est la probabilité annuelle d'occurrence du désastre) et ω_t est son ampleur. Cette ampleur est elle-même une variable aléatoire i.i.d. de moyenne γ_ω et de variance σ_ω . Ainsi, l'espérance de D_t est :

$$\mu_D := \mathbb{E}(D_t) = \mathbb{E}(\omega_t d_t) = p\gamma_\omega, \quad (\text{a.35})$$

et sa variance est donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma_D^2 := \text{Var}(D_t) &= \text{Var}(\omega_t d_t) = \mathbb{E}(\omega_t^2 D_t^2) - \mathbb{E}(\omega_t)^2 \mathbb{E}(D_t)^2 = \mathbb{E}(\omega_t^2) p - \mathbb{E}(\omega_t)^2 p^2 \\ &= (\mathbb{E}(\omega_t^2) - \mathbb{E}(\omega_t)^2) p + p \mathbb{E}(\omega_t)^2 - p^2 \mathbb{E}(\omega_t)^2 \\ &= \sigma_\omega^2 p + \gamma_\omega^2 p(1 - p). \end{aligned}$$

Le reste du modèle est inchangé.

B.2.1 “St. Dev. of Diff” dans le modèle avec désastres

Puisque $y_t - y_{t-1} = g_t + c_t - c_{t-1} - D_t + D_{t-1}$, on a :

$$\mathbf{y}_{t-q}^t - \mathbf{y}_{t-q-1}^{t-1} = \mathbf{g}_{t-q}^t + \mathbf{c}_{t-q}^t - \mathbf{c}_{t-q-1}^{t-1} - (\mathbf{D}_{t-q}^t - \mathbf{D}_{t-q-1}^{t-1}). \quad (\text{a.36})$$

Comme les tirages de D_t sont i.i.d., il vient que :

$$\text{Var}(\mathbf{D}_{t-q}^t) = \sigma_D^2 \mathbf{Id}_{q+2},$$

et

$$\text{Var}(\mathbf{D}_{t-q}^t - \mathbf{D}_{t-q-1}^{t-1}) = \sigma_D^2 \Omega_{q+2} \Omega'_{q+2}.$$

L'équation (a.29) devient alors :

$$\boxed{\text{Var}[(1-L)\Theta(L)y_t] = \theta' \left(\Sigma_g^{(q)} + \Omega_{q+2} \Sigma_c^{(q+1)} \Omega'_{q+2} + \sigma_D^2 \Omega_{q+2} \Omega'_{q+2} \right) \theta.} \quad (\text{a.37})$$

où $\Sigma_g^{(q)}$ et $\Sigma_c^{(q+1)}$ sont données par (a.24).

B.2.2 “RSS Diff-in-Diff” pour un filtre linéaire univarié dans le modèle avec désastres

Suivant le même raisonnement que dans la sous-section précédente (B.2.1), l'équation (a.29) devient :

$$\mathbb{V}ar[(1-L)^2\Theta(L)y_t] = \theta' \Omega_{q+2} \left(\Sigma_g^{(q+1)} + \Omega_{q+3} \Sigma_c^{(q+2)} \Omega'_{q+3} + \sigma_D^2 \Omega_{q+3} \Omega'_{q+3} \right) \Omega'_{q+2} \theta. \quad (\text{a.38})$$

où $\Sigma_g^{(q+1)}$ et $\Sigma_c^{(q+2)}$ sont données par (a.24) et les matrices de type Ω_q sont définies par (a.17).

En outre, l'équation (a.30) est remplacée par :

$$\mathbb{V}ar[(1-L)^2y_t] = 2 \frac{\sigma_v^2}{1+\rho} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2} (2\phi^2 - 8\phi + 6) + 6\sigma_D^2. \quad (\text{a.39})$$

B.2.3 Variance de $y_t - \theta(L)y_t$ sous H1 dans le modèle avec désastres

Les calculs sont proches de ceux de la Sous-section B.1.3. D'après la Proposition 5, et puisque l'on a maintenant :

$$y_t - y_{t-1} = g_t + c_t - c_{t-1} - D_t + D_{t-1},$$

l'équation (a.31) est remplacée par :

$$\mathbb{V}ar(y_t - \theta(L)y_t) = \theta' B'_q \left(\Sigma_g^{(q-1)} + \Omega_{q+1} \Sigma_c^{(q)} \Omega'_{q+1} + \sigma_D^2 \Omega_{q+1} \Omega'_{q+1} \right) B_q \theta, \quad (\text{a.40})$$

où $\Sigma_g^{(q-1)}$ et $\Sigma_c^{(q)}$ sont définies par (a.24), où B_q est donnée par (a.4), et où Ω_{q+1} (de dimension $q \times (q+1)$) est donnée par (a.17).

B.2.4 Cas d'un filtre linéaire univarié corrigé des désastres

On considère ici le PIB corrigé des désastres, c'est-à-dire $y_t + D_t = \tilde{y}_t + c_t$ (voir équation a.33) et on considère une estimation du PIB potentiel donnée par :

$$y_t^* = \Theta(L)(y_t + D_t),$$

où la séquence $\{\theta_0, \dots, \theta_q\}$ satisfait H1.

Il est alors clair que les variances $\mathbb{V}ar[(1-L)y_t^*] = \mathbb{V}ar[(1-L)\Theta(L)(y_t + D_t)]$ et $\mathbb{V}ar[(1-L)^2y_t^*] = \mathbb{V}ar[(1-L)^2\Theta(L)(y_t + D_t)]$ sont alors respectivement données par les équations (a.25) et (a.29). Ces variances sont donc respectivement inférieures à celle issue de (a.37) et (a.38).

En revanche, ce filtre n'est pas symétrique, dans le sens où l'on n'a plus $\mathbb{E}(y_t - y_t^*) = 0$. En effet :

$$\mathbb{E}(y_t^*) = \mathbb{E}[\Theta(L)(y_t + D_t)] = \underbrace{\mathbb{E}[\Theta(L)y_t]}_{=\mathbb{E}(y_t) \text{ sous HI}} + \mu_D.$$

Cela implique notamment que le cumul des écarts de production $\sum_{i=0}^t (y_i - y_i^*)$ n'est pas stationnaire (et diverge vers $-\infty$).

D'après la Proposition 4, cette somme est en revanche stationnaire si

$$y_t^* = \theta(L)(y_t + \pi(L)D_t), \quad (\text{a.41})$$

avec $\pi(L) = \sum_{j=0}^h \pi_j L^j$ et $\sum_{i=0}^h \pi_i = 0$.

On peut voir $\theta(L)(y_t + \pi(L)D_t)$ comme une *estimation filtrée et symétrisée du PIB potentiel*.

On a :

$$(1-L)\theta(L)(y_t + \pi(L)D_t) = \theta' [\mathbf{y}_{t-q}^t - \mathbf{y}_{t-q-1}^{t-1} + \pi(L)(\mathbf{D}_{t-q}^t - \mathbf{D}_{t-q-1}^{t-1})].$$

En utilisant la notation (a.9) pour $\Pi(\pi, q+1)$, on obtient :

$$(1-L)\theta(L)(y_t + \pi(L)D_t) = \theta' [\mathbf{y}_{t-q}^t - \mathbf{y}_{t-q-1}^{t-1} + \Pi(\pi, q+1)(\mathbf{D}_{t-q-h}^t - \mathbf{D}_{t-q-1-h}^{t-1})],$$

puis, en utilisant $\Delta y_t = g_t + c_t - c_{t-1} - D_t + D_{t-1}$:

$$(1-L)\theta(L)(y_t + \pi(L)D_t) = \theta' [\mathbf{g}_{t-q}^t + \mathbf{c}_{t-q}^t - \mathbf{c}_{t-q-1}^{t-1} + \Pi(\pi - \mathbf{1}_{h+1}, q+1)(\mathbf{D}_{t-q-h}^t - \mathbf{D}_{t-q-1-h}^{t-1})].$$

L'équation (a.25) devient alors :

$$\begin{aligned} \text{Var}[(1-L)\theta(L)(y_t + \pi(L)D_t)] = \\ \theta' \left(\Sigma_g^{(q)} + \Omega_{q+2} \Sigma_c^{(q+1)} \Omega_{q+2}' + \sigma_D^2 \Pi \left(\pi - \mathbf{1}_{h+1}^{0,1}, q+1 \right) \Omega_{q+h+2} \Omega_{q+h+2}' \Pi \left(\pi - \mathbf{1}_{h+1}^{0,1}, q+1 \right)' \right) \theta. \end{aligned} \quad (\text{a.42})$$

où $\Sigma_g^{(q)}$ et $\Sigma_c^{(q+1)}$ sont données par (a.24), les matrices de type Ω_q sont définies par (a.17) et $\Pi(\pi - \mathbf{1}_{h+1}^{0,1}, q+1)$ est définie via (a.9), et où $\mathbf{1}_{h+1}^{0,1}$ est un vecteur de dimension $h+1$ égal à $[1, 0, \dots, 0]'$ (notation cohérente avec la notation a.15).

Calculons maintenant la mesure “RSS Diff-in-Diff” pour le filtre défini par (a.41). On a :

$$(1-L)^2 \theta(L)(y_t + \pi(L)D_t) = \theta' \Omega_{q+2} [\mathbf{y}_{t-q-1}^t - \mathbf{y}_{t-q-2}^{t-1} + \pi(L)(\mathbf{D}_{t-q-1}^t - \mathbf{D}_{t-q-2}^{t-1})].$$

En utilisant la notation (a.9) :

$$(1-L)^2 \theta(L)(y_t + \pi(L)D_t) = \theta' \Omega_{q+2} [\mathbf{y}_{t-q-1}^t - \mathbf{y}_{t-q-2}^{t-1} + \Pi(\pi, q+2)(\mathbf{D}_{t-q-1-h}^t - \mathbf{D}_{t-q-2-h}^{t-1})],$$

puis, en utilisant $\Delta y_t = g_t + \Delta c_t - \Delta D_t$:

$$\begin{aligned} & (1-L)^2 \theta(L)(y_t + \pi(L)D_t) \\ &= \theta' \Omega_{q+2} \left[\mathbf{g}_{t-q-1}^t + \mathbf{c}_{t-q-1}^t - \mathbf{c}_{t-q-2}^{t-1} + \Pi \left(\pi - \mathbf{1}_{h+1}^{0,1}, q+2 \right) (\mathbf{D}_{t-q-1-h}^t - \mathbf{D}_{t-q-2-h}^{t-1}) \right]. \end{aligned}$$

L'équation (a.29) devient alors :

$$\begin{aligned} & \mathbb{V}ar \left[(1-L)^2 \theta(L)(y_t + \pi(L)D_t) \right] \\ &= \theta' \Omega_{q+2} \left\{ \Sigma_g^{(q+1)} + \Omega_{q+3} \Sigma_c^{(q+2)} \Omega'_{q+3} + \right. \\ & \quad \left. \sigma_D^2 \Pi \left(\pi - \mathbf{1}_{h+1}^{0,1}, q+2 \right) \Omega_{q+h+3} \Omega'_{q+h+3} \Pi \left(\pi - \mathbf{1}_{h+1}^{0,1}, q+2 \right)' \right\} \Omega'_{q+2} \theta, \end{aligned} \quad (\text{a.43})$$

où $\Sigma_g^{(q+1)}$ et $\Sigma_c^{(q+2)}$ sont données par (a.24), les matrices de type Ω_q sont définies par (a.17) et $\Pi(\pi - \mathbf{1}_{h+1}, q+2)$ est définie via (a.9); voir aussi (a.15) pour la notation $\mathbf{1}_{h+1}^{0,1}$.

Calculons la variance de l'écart de production filtré et symétrisé. L'écart de production filtré est maintenant donné par :

$$\begin{aligned} y_t - \theta(L)(y_t + \pi(L)D_t) &= [1 - \theta(L)](y_t + D_t) - [1 - \theta(L)]D_t - \theta(L)\pi(L)D_t \\ &= [1 - \theta(L)](y_t + D_t) - [1 - \theta(L)\{1 - \pi(L)\}]D_t, \end{aligned}$$

qui constitue une formulation intéressante car $y_t + D_t$ ($= \tilde{y}_t + c_t$) et D_t sont des variables indépendantes. Il en découle que :

$$\mathbb{V}ar(y_t - \theta(L)\{y_t + \pi(L)D_t\}) = \mathbb{V}ar([1 - \theta(L)](y_t + D_t)) + \mathbb{V}ar([1 - \theta(L)\{1 - \pi(L)\}]D_t).$$

La première de ces deux variances est donnée par le membre de droite de l'équation (a.31). Par ailleurs, on a :¹¹

$$[1 - \theta(L)\{1 - \pi(L)\}]D_t = \left\{ \mathbf{1}_{q+h+1}^{0,1} + \theta' \Pi \left(\pi - \mathbf{1}_{h+1}^{0,1}, q+1 \right) \right\} \mathbf{D}_{t-q-h}^t, \quad (\text{a.44})$$

où $\mathbf{1}_{q+h+1}^{0,1}$ est un vecteur de dimension $q+h+1$ égal à $[1, 0, \dots, 0]'$ (notation cohérente avec la

11. On pourra noter que cette expression de $[1 - \theta(L)\{1 - \pi(L)\}]D_t$ est différente de celle donnée dans (a.13) : cela s'explique par le fait que cette dernière est valide seulement lorsque $\sum_{i=0}^h \pi_i = 0$. Naturellement, les deux formulations coïncident lorsque $\sum_{i=0}^h \pi_i = 0$.

notation [a.15](#)). Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \text{Var}[y_t - \theta(L)\{y_t + \pi(L)D_t\}] \\
 &= \theta' B_q' \left(\Sigma_g^{(q-1)} + \Omega_{q+1} \Sigma_c^{(q)} \Omega_{q+1}' \right) B_q \theta + \\
 & \sigma_D^2 \left\{ \mathbf{1}_{q+h+1}^{0,1} + \Pi \left(\pi - \mathbf{1}_{h+1}^{0,1}, q+1 \right)' \theta \right\}' \left\{ \mathbf{1}_{q+h+1}^{0,1} + \Pi \left(\pi - \mathbf{1}_{h+1}^{0,1}, q+1 \right)' \theta \right\},
 \end{aligned} \tag{a.45}$$

où $\Sigma_g^{(q-1)}$ et $\Sigma_c^{(q)}$ sont données par [\(a.24\)](#), les matrices de type Ω_q sont définies par [\(a.17\)](#), B_q est donnée par [\(a.4\)](#), $\mathbf{1}_{q+h+1}^{0,1}$ est un vecteur de dimension $q+h+1$ égal à $[1, 0, \dots, 0]'$, et la fonction Π est définie via [\(a.9\)](#); voir aussi [\(a.15\)](#) pour la notation $\mathbf{1}_{h+1}^{0,1}$.

Il convient de noter que les équations de variances [\(a.43\)](#) et [\(a.45\)](#) sont valides même si la séquence $\{\pi_0, \dots, \pi_h\}$ ne satisfait pas $\sum_{i=0}^h \pi_i = 0$. De plus, même si $\sum_{i=0}^h \pi_i \neq 0$, on a :

$$\mathbb{E}[\{(1-L)^2 y_t^*\}^2] = \text{Var}[(1-L)^2 y_t^*], \tag{a.46}$$

car $\mathbb{E}[(1-L)^2 y_t^*] = 0$, et où $y_t^* = \theta(L)\{y_t + \pi(L)D_t\}$ est l'estimation filtrée (symétrisée) du PIB potentiel. En revanche, on a

$$\mathbb{E}[\{y_t - y_t^*\}^2] = \text{Var}[y_t - y_t^*]$$

seulement si $\sum_{i=0}^h \pi_i = 0$. Dans le cas général, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\{y_t - y_t^*\}^2] &= \text{Var}[y_t - y_t^*] + \mathbb{E}(y_t - y_t^*)^2 \\
 &= \text{Var}[y_t - y_t^*] + \left(\mu_D \sum_{i=0}^h \pi_i \right)^2.
 \end{aligned} \tag{a.47}$$

B.3 Filtrage optimal dans le modèle avec désastres

Proposition 8. *Dans le cadre du modèle décrit ci-dessus (Section [B.2](#)), et en définissant la valeur filtrée du PIB potentiel via*

$$y_t^* = \theta(L)(y_t + \pi(L)D_t),$$

où $\pi(L)$ est prédéfini et où on veut que la séquence $\{\theta_0, \dots, \theta_q\}$ satisfasse [H1](#), la solution

du problème suivant :

$$\theta = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E}[\{y_t - y_t^*\}^2 + \lambda \{(1-L)^2 y_t^*\}^2] \quad (\text{a.48})$$

est donnée par :

$$\theta = \mathbf{1}'_{q+1} \left\{ \begin{bmatrix} Q & E' \\ E & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -C \\ d \end{bmatrix} \right\},$$

où $\mathbf{1}_{q+1}$ est le vecteur de dimension $(q+1) \times 1$ dont toutes les composantes valent 1 et où :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & q \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{a.49})$$

$$\begin{aligned} Q &= \lambda \Omega_{q+2} \left\{ \Sigma_g^{(q+1)} + \Omega_{q+3} \Sigma_c^{(q+2)} \Omega'_{q+3} + \right. \\ &\quad \left. \sigma_D^2 \Pi \left(\pi - \mathbf{1}_{h+1}^{0,1}, q+2 \right) \Omega_{q+h+3} \Omega'_{q+h+3} \Pi \left(\pi - \mathbf{1}_{h+1}^{0,1}, q+2 \right)' \right\} \Omega'_{q+2} + \\ &\quad B'_q \left(\Sigma_g^{(q-1)} + \Omega_{q+1} \Sigma_c^{(q)} \Omega'_{q+1} \right) B_q + \\ &\quad \sigma_D^2 \Pi \left(\pi - \mathbf{1}_{h+1}^{0,1}, q+1 \right) \Pi \left(\pi - \mathbf{1}_{h+1}^{0,1}, q+1 \right)', \end{aligned} \quad (\text{a.50})$$

$$C = \sigma_D^2 \mathbf{1}_{q+h+1}^{0,1} \Pi \left(\pi - \mathbf{1}_{h+1}^{0,1}, q+1 \right)', \quad (\text{a.51})$$

où Ω_{q+2} est définie via (a.17), $\Pi \left(\pi - \mathbf{1}_{h+1}^{0,1}, q+1 \right)$ est définie par (a.9), les matrices où $\Sigma_g^{(q+1)}$ et $\Sigma_c^{(q+2)}$ sont données par (a.24); voir aussi (a.15) pour la notation $\mathbf{1}_{h+1}^{0,1}$.

Démonstration. Par (a.46) et (a.47), on a :

$$\mathbb{E}[\{y_t - y_t^*\}^2 + \lambda \{(1-L)^2 y_t^*\}^2] = \lambda \operatorname{Var}[(1-L)^2 y_t^*] + \operatorname{Var}[y_t - y_t^*] + \left(\mu_D \sum_{i=0}^h \pi_i \right)^2,$$

ce qui donne, en utilisant (a.43) et (a.45) :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[\{y_t - y_t^*\}^2 + \lambda \{(1-L)^2 y_t^*\}^2] \\ &= \lambda \theta' \Omega_{q+2} \left\{ \Sigma_g^{(q+1)} + \Omega_{q+3} \Sigma_c^{(q+2)} \Omega'_{q+3} + \right. \\ &\quad \left. \sigma_D^2 \Pi \left(\pi - \mathbf{1}_{h+1}^{0,1}, q+2 \right) \Omega_{q+h+3} \Omega'_{q+h+3} \Pi \left(\pi - \mathbf{1}_{h+1}^{0,1}, q+2 \right)' \right\} \Omega'_{q+2} \theta + \\ &\quad \theta' B'_q \left(\Sigma_g^{(q-1)} + \Omega_{q+1} \Sigma_c^{(q)} \Omega'_{q+1} \right) B_q \theta + \\ &\quad \sigma_D^2 \left\{ \mathbf{1}_{q+h+1}^{0,1} + \Pi \left(\pi - \mathbf{1}_{h+1}^{0,1}, q+1 \right)' \theta \right\}' \left\{ \mathbf{1}_{q+h+1}^{0,1} + \Pi \left(\pi - \mathbf{1}_{h+1}^{0,1}, q+1 \right)' \theta \right\} + \left(\mu_D \sum_{i=0}^h \pi_i \right)^2, \end{aligned}$$

Ainsi, à $\pi(L)$ fixé, minimiser $\mathbb{E}[\{y_t - y_t^*\}^2 + \lambda\{(1-L)^2 y_t^*\}^2]$ par rapport à θ revient à minimiser $\theta'Q\theta + 2C\theta$ où les matrices Q et C sont celles données respectivement par (a.50) et (a.51). Le résultat découle de la minimisation d'un problème quadratique avec contraintes linéaires (H1) sur les paramètres. \square

Proposition 9. *Dans le cadre du modèle décrit ci-dessus (Section B.2), et en définissant la valeur filtrée du PIB potentiel via*

$$y_t^* = \theta(L)(y_t + \pi(L)D_t),$$

où $\pi(L) = \sum_{i=0}^h \pi_i L^i$, avec $\sum_{i=0}^h \pi_i = 0$, et où on ne considère que les séquences $\{\theta_0, \dots, \theta_q\}$ qui satisfont H1, la solution du problème suivant :

$$\theta = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E} \left[\left\{ \sum_{i=0}^t (y_t - y_t^*) \right\}^2 + \lambda \{(1-L)^2 y_t^*\}^2 \right], \quad (\text{a.52})$$

en considérant un grand t (de sorte que la corrélation entre (g_0, c_0, D_0) d'une part et (g_t, c_t, D_t) d'autre part est négligeable) est donnée par :

$$\theta = \mathbf{1}'_{q+1} \left\{ \left[\begin{array}{cc} Q & E' \\ E & 0 \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} 0 \\ d \end{array} \right] \right\},$$

où $\mathbf{1}_{q+1}$ est le vecteur de dimension $(q+1) \times 1$ dont toutes les composantes valent 1 et où :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & q \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{a.53})$$

$$\begin{aligned} Q &= \lambda \Omega_{q+2} \left\{ \Sigma_g^{(q+1)} + \Omega_{q+3} \Sigma_c^{(q+2)} \Omega'_{q+3} + \right. \\ &\quad \left. \sigma_D^2 \Pi \left(\pi - \mathbf{1}_{h+1}^{0,1}, q+2 \right) \Omega_{q+h+3} \Omega'_{q+h+3} \Pi \left(\pi - \mathbf{1}_{h+1}^{0,1}, q+2 \right)' \right\} \Omega'_{q+2} + \\ &\quad 2B'_q B'_{q-1} \left\{ \Sigma_g^{(q-2)} + \Omega_q \Sigma_c^{(q-1)} \Omega'_q \right\} B_{q-1} B_q + \\ &\quad 2\sigma_D^2 [B'_{q,h} - \Pi(B_h \pi, q+1)] [B'_{q,h} - \Pi(B_h \pi, q+1)]', \end{aligned} \quad (\text{a.54})$$

où Ω_{q+2} est définie via (a.17), $\Pi \left(\pi - \mathbf{1}_{h+1}^{0,1}, q+1 \right)$ est définie par (a.9), les matrices où $\Sigma_g^{(q+1)}$ et $\Sigma_c^{(q+2)}$ sont données par (a.24); voir aussi (a.15) pour la notation $\mathbf{1}_{h+1}^{0,1}$.

Démonstration. Sous **H1**, et si $\sum_{i=0}^h \pi_i = 0$, on a $\mathbb{E}(\sum_{i=0}^t (y_i - y_i^*)) = 0$, et donc :

$$\mathbb{E} \left(\left\{ \sum_{i=0}^t (y_i - y_i^*) \right\}^2 \right) = \mathbb{V}ar \left(\sum_{i=0}^t y_i - y_i^* \right).$$

Cette variance est donnée par la Proposition 4 :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}ar \left(\sum_{i=0}^t (y_i - y_i^*) \right) &= 2\theta' B_q' B_{q-1}' \mathbb{V}ar(\mathbf{v}_{t-q+2}^t - \mathbf{v}_{t-q+1}^{t-1}) B_{q-1} B_q \theta + \\ &\quad 2\theta' (B_{q,h}' - \Pi(B_h \pi, q+1)) \mathbb{V}ar(\mathbf{D}_{t-q-h}^t) (B_{q,h}' - \Pi(B_h \pi, q+1))' \theta, \end{aligned}$$

en utilisant, dans le cas du modèle présent :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}ar(\mathbf{v}_{t-q+2}^t - \mathbf{v}_{t-q+1}^{t-1}) &= \Sigma_g^{(q-2)} + \Omega_q \Sigma_c^{(q-1)} \Omega_q' \quad (\text{avec } \Delta v_t = g_t + c_t - c_{t-1} \text{ et par (a.23)}) \\ \mathbb{V}ar(\mathbf{D}_{t-q-h}^t) &= \sigma_D^2 \mathbf{Id}_{(q+h+1) \times (q+h+1)}. \end{aligned}$$

De plus, comme $\mathbb{E}[(1-L)^2 y_t^*] = 0$, on a $\mathbb{E}[\{(1-L)^2 y_t^*\}^2] = \mathbb{V}ar[(1-L)^2 y_t^*]$; et cette dernière est donnée par (a.43).

Ce qui précède implique que le critère à minimiser est de la forme $\theta' Q \theta$. Le résultat est obtenu en appliquant les formules de minimisation d'une forme quadratique avec contraintes linéaires ($E\theta = d$). \square

B.4 Calibrage du modèle

B.4.1 Modèle sans désastre

Le modèle présenté dans la Section B.1 comprend 5 paramètres : μ , ρ , σ_v , ϕ et σ_ε . Nous proposons un calibrage fondé sur les estimations SECO de l'écart de production¹². Les données utilisées (PIB et PIB potentiel, notés PIB_t et \widetilde{PIB}_t) sont à fréquence trimestrielle. Nous les transformons en données annuelles en additionnant les PIB des quatre trimestres de chaque année. Nous calculons ensuite g_t en calculant le taux de croissance (en log) du PIB potentiel annuel (c'est-à-dire $g_t = \log(\widetilde{PIB}_t / \widetilde{PIB}_{t-1})$) et l'output gap est donné par $c_t = \log(PIB_t / \widetilde{PIB}_t)$.

Nous estimons alors des dynamiques AR(1) pour les deux séries ainsi obtenues pour g_t et c_t sur la période 1980-2019. Le calibrage obtenu est présenté dans le tableau 3.

12. Ces données sont extraites de la page internet suivante : [Croissance potentielle et écart de production \(XLS, 106 kB, 15.12.2020\)](#).

Paramètre	μ	ρ	σ_v	ϕ	σ_ε
Valeur	0.0021	0.8735	0.0022	0.565	0.0118

TABLE 3 – Ce tableau donne le calibrage du modèle la Section B.1. Ce calibrage est réalisé à partir de données SECO (PIB potentiel), voir Section B.4.1.

B.4.2 Modèle avec désastre

Pour calibrer le modèle avec désastre (décrit en B.2), nous employons une plus grande période de temps et utilisons pour cela la base de données développée par Jordà *et al.* (2016)¹³. Cette base de données contient notamment des historiques très longs de PIB. Pour la Suisse, nous avons une série à fréquence annuelle sur la période 1880-2016. Nous ne retenons que la période d’après-guerre, de 1950 à 2016.

On rappelle que les désastres sont donnés par $D_t = d_t \omega_t$ (équation a.34), où les variables d_t sont ω_t sont supposées indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.). En particulier, d_t suit une distribution de Bernoulli de paramètre p (c’est-à-dire que $d_t = 1$ avec une probabilité p et $d_t = 0$ avec une probabilité $1 - p$). Nous fixons la probabilité des désastres à $1/25$ ($p = 4\%$), impliquant qu’un désastre ($d_t = 1$) a lieu, en moyenne, une fois tous les 25 ans. De plus, on suppose que l’ampleur des désastres, ω_t , est tirée dans une distribution exponentielle de paramètre γ_ω , de sorte que $\mathbb{E}(\omega_t) = \gamma_\omega$, comme requis par (a.35). Pour ce type de distribution, nous avons alors par ailleurs $\text{Var}(\omega_t) = \gamma_\omega^2$, ce qui implique notamment :

$$\begin{aligned}
 \sigma_D^2 = \mathbb{E}(D_t^2) - \mathbb{E}(D_t)^2 &= \mathbb{E}(d_t^2)\mathbb{E}(\omega_t^2) - \mathbb{E}(d_t)^2\mathbb{E}(\omega_t)^2 \\
 &= \mathbb{E}(d_t)[\text{Var}(\omega_t) + \mathbb{E}(\omega_t)^2] - \mathbb{E}(d_t)^2\mathbb{E}(\omega_t)^2 \\
 &= p(2 - p)\gamma_\omega^2.
 \end{aligned} \tag{a.55}$$

Les paramètres ρ , ϕ et σ_v sont laissés à leurs valeurs données dans le tableau 3. Les paramètres σ_ε et γ_ω sont alors déterminés de sorte à reproduire la variance et la kurtosis empirique de Δy_t (moment d’ordre 4). Les formules de la variance de la kurtosis de Δy_t sont données dans la section B.5. Le tableau 3 présente la calibration ainsi obtenue. La valeur de γ_ω indique que l’ampleur moyenne des désastres (γ_ω) est de 2.5%. Enfin, le paramètre μ est modifié de sorte à ce que la croissance moyenne dans ce modèle soit égale à la moyenne empirique.

Paramètre	μ	ρ	σ_v	ϕ	σ_ε	γ_ω	p
Valeur	0.0031	0.8735	0.0022	0.565	0.0204	0.025	0.04

TABLE 4 – Ce tableau donne le calibrage du modèle la Section B.2. Ce calibrage est réalisé à partir de données SECO (PIB potentiel) et de la base de données de Jordà *et al.* (2016), voir Section B.4.2.

13. <http://www.macrohistory.net/data/>.

B.5 Moments d'ordre 2 et 4 de Δy_t dans le modèle avec désastres

Tout d'abord, notons que le fait que ω_t soit tirée dans une distribution exponentielle de paramètre γ_ω implique $\mathbb{E}(\omega_t) = \gamma_\omega$, $\mathbb{E}(\omega_t^2) = 2\gamma_\omega^2$, $\mathbb{E}(\omega_t^3) = 6\gamma_\omega^3$ et $\mathbb{E}(\omega_t^4) = 24\gamma_\omega^4$, ce dont on déduit :

$$\mathbb{E}(D_t) = p\gamma_\omega, \quad \mathbb{E}(D_t^2) = 2p\gamma_\omega^2, \quad \mathbb{E}(D_t^3) = 6p\gamma_\omega^3, \quad \mathbb{E}(D_t^4) = 24p\gamma_\omega^4, \quad (\text{a.56})$$

et

$$\text{Var}[-D_t + D_{t-1}] = \mathbb{E}[(D_t - D_{t-1})^2] = 2\mathbb{E}(D_t^2) - 2\mathbb{E}(D_t)^2 = 2p\gamma_\omega^2(2-p).$$

En utilisant (a.26)—qui donne la variance de $g_t + c_t - c_{t-1}$ —et puisque $\{g_t + c_t - c_{t-1}\}$ et $\{D_t - D_{t-1}\}$ sont indépendantes, on a :

$$\begin{aligned} \text{Var}(\Delta y_t) &= \text{Var}(g_t + c_t - c_{t-1}) + \text{Var}(D_t + D_{t-1}) \\ &= \frac{\sigma_v^2}{1-\rho^2} + \frac{2\sigma_\varepsilon^2}{1+\phi} + 2p\gamma_\omega^2(2-p). \end{aligned} \quad (\text{a.57})$$

Par ailleurs, en utilisant le fait que $g_t + c_t - c_{t-1}$ est gaussien (et donc que sa kurtosis est égale à 3), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\{\Delta y_t - \mathbb{E}(\Delta y_t)\}^4] &= 3 \left(\mathbb{E} \left[\left(g_t - \frac{\mu}{1-\rho} + c_t - c_{t-1} \right)^2 \right] \right)^2 + \mathbb{E}[(-D_t + D_{t-1})^4] + \\ &6\mathbb{E} \left[\left(g_t - \frac{\mu}{1-\rho} + c_t - c_{t-1} \right)^2 \right] \mathbb{E}[(-D_t + D_{t-1})^2]. \end{aligned} \quad (\text{a.58})$$

En utilisant (a.56), on obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(-D_t + D_{t-1})^4] &= 2\mathbb{E}[D_t^4] + 6(\mathbb{E}[D_t^2])^2 - 8\mathbb{E}[D_t]\mathbb{E}[D_t^3] \\ &= 48p\gamma_\omega^4 + 24p^2\gamma_\omega^4 - 48p^2\gamma_\omega^4 = 24p\gamma_\omega^4(2-p), \end{aligned}$$

et l'équation (a.58) devient :

$$\mathbb{E}[\{\Delta y_t - \mathbb{E}(\Delta y_t)\}^4] = 3 \left(\frac{\sigma_v^2}{1-\rho^2} + \frac{2\sigma_\varepsilon^2}{1+\phi} \right)^2 + 24p\gamma_\omega^4(2-p) + 12 \left(\frac{\sigma_v^2}{1-\rho^2} + \frac{2\sigma_\varepsilon^2}{1+\phi} \right) p\gamma_\omega^2(2-p). \quad (\text{a.59})$$

C Ecriture matricielle des filtrages linéaires univariés

C.1 Ecriture matricielle de la méthode mHP

On propose ici une formulation matricielle du problème résolu par le filtre mHP (voir [Bruchez, 2003a,b](#)). Le problème de minimisation définissant ce filtre s'écrit :

$$\tau = \underset{\tau_{T-q+1}, \dots, \tau_T}{\operatorname{argmin}} \sum_{t=T-q+1}^T \frac{1}{\lambda_t} (y_t - \tau_t)^2 + \sum_{t=T-q+2}^{T-1} \{(\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1})\}^2,$$

avec les poids suivants :

$$\begin{cases} \lambda_t = \lambda & \text{for } t = T - q + 3, \dots, T - 2 \\ \lambda_t = \frac{3}{2}\lambda & \text{for } t \in \{T - q + 2, T - 1\} \\ \lambda_t = 3\lambda & \text{for } t \in \{T - q + 1, T\}. \end{cases}$$

La différence avec le filtre de [Hodrick et Prescott \(1997\)](#) réside dans les valeurs différentes prises par les λ_t des extrémités de l'échantillon ($t \in \{T - q + 1, T - q + 2, T - 1, T\}$). En forme matricielle, le problème se réécrit :

$$\tau = \underset{\tau}{\operatorname{argmin}} (\mathbf{y}_{T-q+1}^T - \tau)' \operatorname{diag} \left(\frac{1}{\lambda} \right) (\mathbf{y}_{T-q+1}^T - \tau) + \tau' (\Omega_q' \Omega_{q-1}') (\Omega_{q-1} \Omega_q) \tau,$$

où $\operatorname{diag} \left(\frac{1}{\lambda} \right)$ est une matrice diagonale de dimension $q \times q$ dont la t^{eme} composante de la diagonale est $1/\lambda_{T-q+t}$, et où les matrices de type Ω_q sont données par [\(a.17\)](#).

En utilisant la formule des moindres carrés ordinaires, on obtient :

$$\begin{aligned} \tau &= \underset{\tau}{\operatorname{argmin}} - \left\{ 2\mathbf{y}_{T-q+1}^T \operatorname{diag} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \right\} \tau + \tau' \left(\operatorname{diag} \left(\frac{1}{\lambda} \right) + (\Omega_q' \Omega_{q-1}') (\Omega_{q-1} \Omega_q) \right) \tau \\ &= \left(\operatorname{diag} \left(\frac{1}{\lambda} \right) + (\Omega_q' \Omega_{q-1}') (\Omega_{q-1} \Omega_q) \right)^{-1} \operatorname{diag} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \mathbf{y}_{T-q+1}^T \\ &= [\mathbf{Id}_q + \operatorname{diag}(\lambda) (\Omega_q' \Omega_{q-1}') (\Omega_{q-1} \Omega_q)]^{-1} \mathbf{y}_{T-q+1}^T. \end{aligned} \quad (\text{a.60})$$

C.2 OLUFHP

On considère une valeur filtrée de y_t s'écrivant sous la forme $\Theta(L)y_t = \sum_{j=0}^q \theta_j y_{t-j}$. La méthode OLUFHP consiste à déterminer la séquence $\theta = \{\theta_0, \dots, \theta_q\}$ qui vérifie l'Hypothèse [H1](#) et qui minimise :

$$\sum_{i=t}^{t+q+1} (y_i - \Theta(L)y_i)^2 + \lambda \sum_{i=t-1}^{t+q} ([\Theta(L)y_{i+1} - \Theta(L)y_i] - [\Theta(L)y_i - \Theta(L)y_{i-1}])^2 \quad (\text{a.61})$$

pour (a) $t = 0$ et (b) une séquence particulière de y_i . Précisément, cette séquence correspond à une marche d'escalier : $y_i = 0$ si $i \geq 0$ et $y_i = 1$ si $i < 0$.

En utilisant les notations suivantes :

$$\mathbf{y}_{t-q}^t = \begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-q} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_{t-q}^t = \underbrace{\begin{bmatrix} y_t & y_{t-1} & \cdots & y_{t-q} \\ y_{t-1} & y_{t-2} & \cdots & y_{t-q-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{t-q} & y_{t-q-1} & \cdots & y_{t-q-q} \end{bmatrix}}_{(q+1) \times (q+1)},$$

la fonction de perte (a.61) s'écrit :

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{y}_t^{t+q+1} - \mathbf{Y}_t^{t+q+1} \boldsymbol{\theta} \right)' \left(\mathbf{y}_t^{t+q+1} - \mathbf{Y}_t^{t+q+1} \boldsymbol{\theta} \right) + \\ & \lambda \boldsymbol{\theta}' \left(\mathbf{Y}_t^{t+q+1} - 2\mathbf{Y}_{t-1}^{t+q} + \mathbf{Y}_{t-2}^{t+q-1} \right)' \left(\mathbf{Y}_t^{t+q+1} - 2\mathbf{Y}_{t-1}^{t+q} + \mathbf{Y}_{t-2}^{t+q-1} \right) \boldsymbol{\theta} \\ = & \mathbf{y}_t^{t+q+1'} \mathbf{y}_t^{t+q+1} - 2\mathbf{y}_t^{t+q+1'} \mathbf{Y}_t^{t+q+1} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}' \left(\mathbf{Y}_t^{t+q+1'} \mathbf{Y}_t^{t+q+1} \right) \boldsymbol{\theta} + \\ & \lambda \boldsymbol{\theta}' \left(\mathbf{Y}_t^{t+q+1} - 2\mathbf{Y}_{t-1}^{t+q} + \mathbf{Y}_{t-2}^{t+q-1} \right)' \left(\mathbf{Y}_t^{t+q+1} - 2\mathbf{Y}_{t-1}^{t+q} + \mathbf{Y}_{t-2}^{t+q-1} \right) \boldsymbol{\theta}. \end{aligned}$$

Ce problème se réécrit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta} &= \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{argmin}} \boldsymbol{\theta}' Q \boldsymbol{\theta} + 2C' \boldsymbol{\theta} \\ \text{t.q.} & E \boldsymbol{\theta} = d, \end{aligned}$$

avec

$$Q = \mathbf{Y}_t^{t+q+1'} \mathbf{Y}_t^{t+q+1} + \lambda \left(\mathbf{Y}_t^{t+q+1} - 2\mathbf{Y}_{t-1}^{t+q} + \mathbf{Y}_{t-2}^{t+q-1} \right)' \left(\mathbf{Y}_t^{t+q+1} - 2\mathbf{Y}_{t-1}^{t+q} + \mathbf{Y}_{t-2}^{t+q-1} \right) \quad (\text{a.62})$$

$$C = \mathbf{Y}_t^{t+q+1'} \mathbf{y}_t^{t+q+1} \quad (\text{a.63})$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & q \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{a.64})$$

La solution de ce problème de minimisation quadratique avec contraintes linéaires est :

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{1}'_{q+1} \left\{ \begin{bmatrix} Q & E' \\ E & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -C \\ d \end{bmatrix} \right\}.$$

où $\mathbf{1}_{q+1}$ est le vecteur de dimension $(q+1) \times 1$ dont toutes les composantes valent 1.

C.3 Filtre récursif optimal ex post

On considère une période de temps allant de $t - N + 1$ à t . Le filtre récursif optimal ex post est donné par la proposition suivante :

Proposition 10. *La solution du problème suivant :*

$$\theta = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{N} \sum_{i=t-N+1}^t \left\{ (y_i - \Theta(L)y_i)^2 + \lambda ([\Theta(L)y_i - \Theta(L)y_{-i}] - [\Theta(L)y_{i-1} - \Theta(L)y_{i-2}])^2 \right\} \quad (\text{a.65})$$

$$t.q. \quad \Theta(L) = \theta_0 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q$$

et où la séquence $\{\theta_0, \dots, \theta_q\}$ satisfait **H1**,

est donnée par :

$$\theta = \mathbf{1}'_{q+1} \left\{ \left[\begin{array}{cc} Q & E' \\ E & 0 \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} 0 \\ d \end{array} \right] \right\},$$

où $\mathbf{1}_{q+1}$ est le vecteur de dimension $(q+1) \times 1$ dont toutes les composantes valent 1 et où :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & q \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{a.66})$$

$$Q = C'_{q+2} \widehat{\Sigma}_{t,t-N+1,q+1}^{\Delta y} C_{q+2} + \lambda \Omega_{q+2} \widehat{\Sigma}_{t,t-N+1,q+1}^{\Delta y} \Omega'_{q+2}, \quad (\text{a.67})$$

où Ω_{q+2} est définie via (a.17) et où

$$C_{q+2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{(q+2) \times (q+1)}, \quad (\text{a.68})$$

$$\text{et} \quad \widehat{\Sigma}_{t,t-N+1,q+1}^{\Delta y} = \frac{1}{N} (\mathbf{Y}_{t-N+1,q+2}^t - \mathbf{Y}_{t-N,q+2}^{t-1})' (\mathbf{Y}_{t-N+1,q+2}^t - \mathbf{Y}_{t-N,q+2}^{t-1}), \quad (\text{a.69})$$

avec, pour tout K :

$$\mathbf{Y}_{t-K,q}^t = \underbrace{\begin{bmatrix} y_t & y_{t-1} & \dots & y_{t-q+1} \\ y_{t-1} & y_{t-2} & \dots & y_{t-q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{t-K} & y_{t-K-1} & \dots & y_{t-K-q+1} \end{bmatrix}}_{(K+1) \times q}. \quad (\text{a.70})$$

Démonstration. La fonction de perte (a.65) se réécrit :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} (\mathbf{y}_{t-N+1}^t - \mathbf{Y}_{t-N+1}^t \boldsymbol{\theta})' (\mathbf{y}_{t-N+1}^t - \mathbf{Y}_{t-N+1}^t \boldsymbol{\theta}) + \\ & \frac{1}{N} \lambda \boldsymbol{\theta}' (\mathbf{Y}_{t-N+1}^t - 2\mathbf{Y}_{t-N}^{t-1} + \mathbf{Y}_{t-N-1}^{t-2})' (\mathbf{Y}_{t-N+1}^t - 2\mathbf{Y}_{t-N}^{t-1} + \mathbf{Y}_{t-N-1}^{t-2}) \boldsymbol{\theta}. \end{aligned}$$

Si $\boldsymbol{\theta}$ vérifie H1, alors, par le Lemme 1 :

$$y_t - \mathbf{y}_{t-q}^t \boldsymbol{\theta} = (\mathbf{y}_{t-q+1}^t - \mathbf{y}_{t-q}^{t-1})' B_q \boldsymbol{\theta},$$

ce qui implique, en empilant pour les indices de temps allant de $t - N + 1$ à t :

$$\mathbf{y}_{t-N+1}^t - \mathbf{Y}_{t-N+1}^t \boldsymbol{\theta} = (\mathbf{Y}_{t-N+1,q}^t - \mathbf{Y}_{t-N,q}^{t-1}) B_q \boldsymbol{\theta} \quad (\text{a.71})$$

où $\mathbf{Y}_{t-N+1,q}^t$ est définie par (a.70). Par ailleurs, on a :

$$\mathbf{y}_{t-q}^t - 2\mathbf{y}_{t-q-1}^{t-1} + \mathbf{y}_{t-q}^{t-2} = \Omega_{q+2} (\mathbf{y}_{t-q-1}^t - \mathbf{y}_{t-q-2}^{t-1}),$$

où Ω_{q+2} est définie par (a.17). En transposant :

$$(\mathbf{y}_{t-q}^t - 2\mathbf{y}_{t-q-1}^{t-1} + \mathbf{y}_{t-q}^{t-2})' = (\mathbf{y}_{t-q-1}^t - \mathbf{y}_{t-q-2}^{t-1})' \Omega_{q+2}',$$

et, en empilant pour les indices de temps allant de $t - N + 1$ à t :

$$\mathbf{Y}_{t-N+1}^t - 2\mathbf{Y}_{t-N}^{t-1} + \mathbf{Y}_{t-N-1}^{t-2} = (\mathbf{Y}_{t-N+1,q+2}^t - \mathbf{Y}_{t-N,q+2}^{t-1}) \Omega_{q+2}'. \quad (\text{a.72})$$

En utilisant (a.71) et (a.72), la fonction de perte (a.65) se réécrit $\boldsymbol{\theta}' Q \boldsymbol{\theta}$ où

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{N} B_q' (\mathbf{Y}_{t-N+1,q}^t - \mathbf{Y}_{t-N,q}^{t-1})' (\mathbf{Y}_{t-N+1,q}^t - \mathbf{Y}_{t-N,q}^{t-1}) B_q + \\ & \frac{1}{N} \lambda \Omega_{q+2} (\mathbf{Y}_{t-N+1,q+2}^t - \mathbf{Y}_{t-N,q+2}^{t-1})' (\mathbf{Y}_{t-N+1,q+2}^t - \mathbf{Y}_{t-N,q+2}^{t-1}) \Omega_{q+2}'. \end{aligned}$$

Afin de faire apparaître les mêmes matrices de type \mathbf{Y} , on peut remplacer B_q (définie par l'équation a.4) par C_{q+2} (équation a.68) pour obtenir (a.67) qui utilise la matrice $\widehat{\Sigma}_{t,t-N+1,q+1}^{\Delta y}$ qui est donnée par (a.69). Le résultat découle de la minimisation quadratique avec contraintes linéaires. \square

C.4 Filtre optimal quand le processus de y_t est connu

Proposition 11. *La solution du problème suivant :*

$$\theta = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E}[\{y_t - \Theta(L)y_t\}^2 + \lambda \{(1-L)^2 \Theta(L)y_t\}^2] \quad (\text{a.73})$$

$$t.q. \quad \Theta(L) = \theta_0 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q$$

et où la séquence $\{\theta_0, \dots, \theta_q\}$ satisfait **H1**,

est donnée par :

$$\theta = \mathbf{1}'_{q+1} \left\{ \left[\begin{array}{cc} Q & E' \\ E & 0 \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} 0 \\ d \end{array} \right] \right\},$$

où $\mathbf{1}_{q+1}$ est le vecteur de dimension $(q+1) \times 1$ dont toutes les composantes valent 1 et où :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & q \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{a.74})$$

$$Q = C'_{q+2} \Sigma_{q+1}^{\Delta y} C_{q+2} + \lambda \Omega_{q+2} \Sigma_{q+1}^{\Delta y} \Omega'_{q+2}, \quad (\text{a.75})$$

où Ω_{q+2} est définie via (a.17), C_{q+2} est définie par (a.68), et

$$\Sigma_{q+1}^{\Delta y} = \mathbb{V}\text{ar}(\mathbf{y}_{t-q-1}^t - \mathbf{y}_{t-q-2}^{t-1}). \quad (\text{a.76})$$

Démonstration. Le Lemme 1 et (a.14) donnent, respectivement :

$$\begin{aligned} y_t - \Theta(L)y_t &= \theta' B'_q (\mathbf{y}_{t-q+1}^t - \mathbf{y}_{t-q}^{t-1}) \\ (1-L)^2 \Theta(L)y_t &= \theta' \Omega_{q+2} (\mathbf{y}_{t-q-1}^t - \mathbf{y}_{t-q-2}^{t-1}). \end{aligned}$$

En conséquence, la fonction de perte (a.73) se réécrit :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[\{y_t - \Theta(L)y_t\}^2 + \lambda \{(1-L)^2 \Theta(L)y_t\}^2] \\ &= \theta' B'_q \{ \mathbb{V}\text{ar}(\mathbf{y}_{t-q+1}^t - \mathbf{y}_{t-q}^{t-1}) + \mathbb{E}(y_t - y_{t-1})^2 \mathbf{1}_q \mathbf{1}'_q \} B_q \theta + \\ &\quad \lambda \theta' \Omega_{q+2} \{ \mathbb{V}\text{ar}(\mathbf{y}_{t-q-1}^t - \mathbf{y}_{t-q-2}^{t-1}) + \mathbb{E}(y_t - y_{t-1})^2 \mathbf{1}_{q+2} \mathbf{1}'_{q+2} \} \Omega'_{q+2} \theta. \end{aligned}$$

(où $\mathbf{1}_q$ est le vecteur de dimension $q \times 1$ dont toutes les composantes valent 1). Si la séquence $\{\theta_0, \dots, \theta_q\}$ satisfait **H1**, alors : $\mathbf{1}'_q B_q \theta = 0$ (c'est l'équation a.3). De plus, la forme de la matrice Ω_{q+2} (voir l'équation a.17) implique que $\Omega_{q+2} \mathbf{1}_{q+2} = 0$. Sous **H1**, il vient donc que :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[\{y_t - \Theta(L)y_t\}^2 + \lambda \{(1-L)^2 \Theta(L)y_t\}^2] \\ &= \theta' B'_q \mathbb{V}\text{ar}(\mathbf{y}_{t-q+1}^t - \mathbf{y}_{t-q}^{t-1}) B_q \theta + \lambda \theta' \Omega_{q+2} \mathbb{V}\text{ar}(\mathbf{y}_{t-q-1}^t - \mathbf{y}_{t-q-2}^{t-1}) \Omega'_{q+2} \theta. \end{aligned}$$

La fonction de perte se réécrit alors :

$$\mathbb{E}[\{y_t - \Theta(L)y_t\}^2 + \lambda \{(1-L)^2 \Theta(L)y_t\}^2] = \theta' C'_{q+2} \Sigma_{q+1}^{\Delta y} C_{q+2} \theta + \lambda \theta' \Omega_{q+2} \Sigma_{q+1}^{\Delta y} \Omega'_{q+2} \theta.$$

où $\Sigma_{q+1}^{\Delta y}$ est définie par (a.76) et où C_{q+2} est donnée par (a.68). Le programme de minimisation (a.73) est donc de la forme :

$$\begin{aligned} \theta &= \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \theta' Q \theta \\ &t.q. \quad E\theta = d. \end{aligned}$$

Le résultat découle de la résolution de problèmes de minimisation quadratique avec contraintes linéaires. □

D Exponentiation et symétrie

Dans cette annexe, on cherche à étudier ce qui se passe sur la somme des output gaps lorsque ceux-ci sont exprimés en niveau ($\exp(y_t) - \exp(y_t^*)$), alors que le reste de ce document se concentre sur des output gaps exprimés à l'aide des logarithmes du PIB et du PIB tendancier ($y_t - y_t^* = \log(PIB_t/PIB_t^*)$).

On se place dans le cas où $\theta(L)$ satisfait **H1** et Δy_t est stationnaire en covariance.

La somme des output gaps exprimés en niveau est donnée par :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^t (\exp(y_i) - \exp(y_i^*)) &= \sum_{i=0}^t \exp(y_i^*) (\exp(y_i - y_i^*) - 1) \\ &= \sum_{i=0}^t \exp(y_i^*) \left((y_i - y_i^*) + \frac{1}{2}(y_i - y_i^*)^2 + o((y_i - y_i^*)^2) \right), \end{aligned} \quad (\text{a.77})$$

en appliquant un développement de Taylor de la fonction \exp , où $o((y_i - y_i^*)^2)$ est petit devant $(y_i - y_i^*)^2$.

Afin d'avoir une idée de l'ordre de grandeur de l'effet quadratique, considérons le cas où (i) le PIB potentiel croît géométriquement au taux μ (avec $\mu \ll 1$), (ii) $\mathbb{E}(y_i - y_i^*) = 0$ et (iii) $\text{Var}(y_i - y_i^*) = \sigma_{OG}^2$. Alors :

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^t (\exp(y_i) - \exp(y_i^*)) \right] \approx \frac{\sigma_{OG}^2}{2} \exp(y_0^*) \frac{\exp(\mu(t+1)) - 1}{\exp(\mu) - 1}. \quad (\text{a.78})$$

Ceci converge vers $+\infty$ avec t , mais ne devient grand qu'après un assez grand nombre d'années. A titre d'exemple, si $\sigma_{OG}^2 = (0.02)^2$ (écart-type de l'output gap de 2%) et si $\mu = 2\%$, on a, après 100 ans :

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{100} (\exp(y_i) - \exp(y_i^*)) \right] \approx 6.5\%.$$

L'effet quadratique explique alors une espérance du cumul des output gaps, sur 100 années, équivalent à 6.5% du PIB potentiel de l'année 0, ce qui correspond à 0.9% du PIB potentiel de l'année 100.

Reprenons le terme linéaire de l'équation (a.77) et appliquons le Lemme 1, avec B_q défini par

(a.4) :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^t \exp(y_i^*)(y_i - y_i^*) &= \sum_{i=0}^t \exp[\theta(L)y_i](\theta' B'_q)(\mathbf{y}_{i-q+1}^i - \mathbf{y}_{i-q}^{i-1}) \\
 &= \exp[\theta(L)y_t](\theta' B'_q) \mathbf{y}_{t-q+1}^t + \sum_{i=0}^{t-1} \left(\exp[\theta(L)y_i] - \exp[\theta(L)y_{i+1}] \right) (\theta' B'_q) \mathbf{y}_{i-q+1}^i \\
 &\quad - \exp[\theta(L)y_0](\theta' B'_q) \mathbf{y}_{-q}^{-1}.
 \end{aligned}$$

Par le Lemme 4 :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^t \exp(y_i^*)(y_i - y_i^*) &= \exp[\theta(L)y_t](B_q \theta)' B'_{q-1} (\mathbf{y}_{t-q+2}^t - \mathbf{y}_{t-q+1}^{t-1}) \\
 &\quad - \exp[\theta(L)y_0](\theta' B'_q) B'_{q-1} (\mathbf{y}_{-q+1}^{-1} - \mathbf{y}_{-q}^{-2}) \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{t-1} \underbrace{\left(\exp[\theta(L)y_i] - \exp[\theta(L)y_{i+1}] \right)}_{\approx \exp[\theta(L)y_i] \{ \theta(L)(y_i - y_{i+1}) \}} (\theta' B'_q) \mathbf{y}_{i-q+1}^i.
 \end{aligned}$$

On a donc, en appliquant à nouveau le Lemme 4 :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^t \exp(y_i^*)(y_i - y_i^*) &\approx \exp[\theta(L)y_t](B_q \theta)' B'_{q-1} (\mathbf{y}_{t-q+2}^t - \mathbf{y}_{t-q+1}^{t-1}) \\
 &\quad - \exp[\theta(L)y_0](\theta' B'_q) B'_{q-1} (\mathbf{y}_{-q+1}^{-1} - \mathbf{y}_{-q}^{-2}) \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{t-1} \left(\exp[\theta(L)y_i] \{ \theta(L)(y_i - y_{i+1}) \} \right) \left((\theta' B'_q) B'_{q-1} (\mathbf{y}_{i-q+2}^i - \mathbf{y}_{i-q+1}^{i-1}) \right)
 \end{aligned}$$

En conséquence, divisé par le PIB de la dernière période (t) :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\exp(y_t)} \sum_{i=0}^t \exp(y_i^*)(y_i - y_i^*) &\approx \frac{\exp[\theta(L)y_t]}{\exp(y_t)} \underbrace{(B_q \theta)' B'_{q-1} (\mathbf{y}_{t-q+2}^t - \mathbf{y}_{t-q+1}^{t-1})}_{\text{stationnaire}} \\
 &\quad - \frac{\exp[\theta(L)y_0]}{\exp(y_t)} \underbrace{(\theta' B'_q) B'_{q-1} (\mathbf{y}_{-q+1}^{-1} - \mathbf{y}_{-q}^{-2})}_{\text{stationnaire}} \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{t-1} \frac{\exp[\theta(L)y_i]}{\exp[\theta(L)y_t]} \left(\theta(L)(y_i - y_{i+1}) \right) \left((\theta' B'_q) B'_{q-1} (\mathbf{y}_{i-q+2}^i - \mathbf{y}_{i-q+1}^{i-1}) \right).
 \end{aligned}$$

Dans la dernière somme, les termes $y_i - y_{i+1}$ et $\mathbf{y}_{i-q+2}^i - \mathbf{y}_{i-q+1}^{i-1}$ sont petits et se multiplient. Aussi, même sur une longue période, on s'attend à une grande stabilité de la somme des output gaps en niveau si $\theta(L)$ vérifie H1.

La figure suivante montre les distributions de sommes des outputs gaps, obtenues par simulation du modèle sans désastre (voir section B.1, calibration du tableau 3). Chacun des 1000 échantillons est simulé sur 50 années. La courbe en trait plein est la p.d.f. de la somme des output gaps fondés sur les logarithmes du PIB, la courbe en pointillés est la p.d.f. de la somme des output gaps en niveau ($\exp(y_t) - \exp(y_t^*)$), divisée par le PIB de fin de période (de 50 années). Le filtre utilisé pour calculer y_t^* est un filtre mHP (fenêtre de 12 années, $\lambda = 100$).

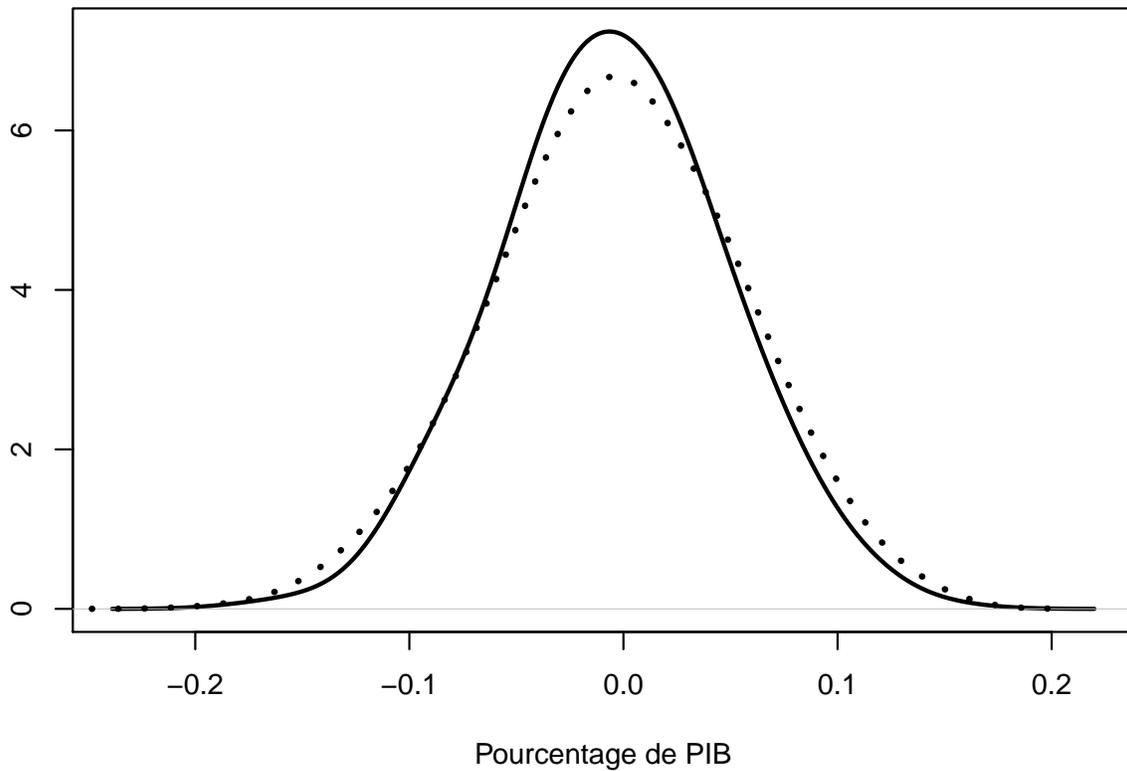


FIGURE 11 – Distributions (p.d.f.) de la somme des output gaps après 50 années (voir explications ci-dessus)

E Filtrage en présence d'un évènement temporaire de type désastre dont l'effet est observable

On suppose que la production découle de la fonction de production de type Cobb-Douglas suivante :

$$Y_t = A_t \times L_t^\alpha \times K_t^{1-\alpha},$$

où L_t est la quantité de travail effective (mesurée en heures), K_t est la quantité de capital et A_t est la productivité totale des facteurs (TFP). En utilisant les lettres minuscules lorsque l'on prend les logarithmes, la dernière expression se réécrit :

$$y_t = a_t + \alpha \ell_t + (1 - \alpha) k_t. \quad (\text{a.79})$$

La quantité de travail L_t effectif peut être décomposée comme suit :

$$L_t = (Pop_t \times Prate_t \times (1 - ELQ_t) - KAE_t) \times \#Arb.stunden_t, \quad (\text{a.80})$$

où Pop_t est la population, $Prate_t$ est le taux de participation, ELQ_t est le taux de chômage (hors chômage partiel, *Kurzarbeit*), $\#Arb.stunden_t$ est le nombre d'heures de travail moyen (par personne travaillant) et KAE_t est le chômage partiel, mesuré en nombre de travailleurs équivalents. On a donc :

$$\begin{aligned} \ell_t = & \log Pop_t + \log Prate_t + \log(1 - ELQ_t) + \log \#Arb.stunden_t - \\ & \underbrace{-\log \left(1 - \frac{KAE_t}{Pop_t \cdot Prate_t \cdot (1 - ELQ_t)} \right)}_{=: kae_t}. \end{aligned} \quad (\text{a.81})$$

On suppose que la dernière composante (kae_t), qui est approximativement égale à $\frac{-KAE_t}{Pop_t \cdot Prate_t \cdot (1 - ELQ_t)}$, est de nature temporaire. On note que $kae_t \geq 0$.

On définit ℓ_t^* comme le logarithme de la quantité d'heures travaillées, hors désastre. C'est-à-dire :

$$\ell_t^* = \ell_t + kae_t. \quad (\text{a.82})$$

Hypothèse H2. *Le PIB potentiel est de la forme :*

$$\tilde{y}_t = \tilde{a}_t + \alpha \tilde{\ell}_t^* + (1 - \alpha) \tilde{k}_t. \quad (\text{a.83})$$

Hypothèse H3. *Les quantités potentielles apparaissant à droite de (a.83) sont des combinaisons linéaires des variables correspondantes, les pondérations étant rassemblées dans un*

vecteur θ . Ce que l'on note :

$$\tilde{a}_t = \theta(L)a_t, \quad \tilde{\ell}_t^* = \theta(L)\ell_t^*, \quad \tilde{k}_t = \theta(L)k_t.$$

De plus, la séquence de pondérations θ satisfait **H1** (impliquant notamment $\mathbb{E}(\theta(L)X_t) = \mathbb{E}(X_t)$ si $\mathbb{E}(\Delta X_t)$ existe et est constant, d'après la Proposition 2).

Proposition 12. Si (a.79), (a.80), ainsi que les Hypothèses **H2** et **H3** sont vérifiées, alors :

$$\boxed{\tilde{y}_t = \theta(L)[y_t + \alpha k a e_t]}, \quad (\text{a.84})$$

et $\mathbb{E}(y_t - \tilde{y}_t) \leq 0$.

Démonstration. L'équation (a.83) (Hypothèse **H2**) et l'Hypothèse **H3** impliquent que :

$$\tilde{y}_t = \theta(L)a_t + \alpha \theta(L)\ell_t^* + (1 - \alpha)\theta(L)k_t.$$

Or, d'après l'équation (a.82) :

$$\theta(L)\ell_t^* = \theta(L)\ell_t + \theta(L)k a e_t.$$

On a donc :

$$\tilde{y}_t = \theta(L)(a_t + \alpha \ell_t + (1 - \alpha)k_t) + \alpha \theta(L)k a e_t,$$

ce qui prouve (a.84). De plus, on a : $\mathbb{E}(y_t - \tilde{y}_t) = -\alpha \mathbb{E}(\theta(L)k a e_t) = -\alpha \mathbb{E}(k a e) \leq 0$. \square

L'analyse qui précède suggère que la variable de désastre D_t utilisée dans le modèle décrit dans la section **B.2** pourrait être remplacée par $\alpha k a e_t$ où $k a e_t$ est définie dans (a.81).

F Intervalle de confiance sur les performances

Si X_t est une série temporelle stationnaire dont les auto-covariances ($\gamma_i = \text{Cov}(X_t, X_{t-i})$) sont absolument sommables¹⁴, alors la moyenne empirique de X_t , calculée sur un intervalle de taille N (suffisamment grand), peut être approchée par une distribution normale de variance donnée par la somme infinie des auto-covariances. C'est-à-dire, si N est grand, on a approximativement :

$$\sqrt{N} \left(\left[\frac{1}{N} \sum_{t=T-N+1}^T X_t \right] - \mathbb{E}(X_t) \right) \sim \mathcal{N} \left(0, \sum_{i=-\infty}^{\infty} \gamma_i \right).$$

En pratique, on peut utiliser cette formule en utilisant le résultat de [Newey et West \(1987\)](#), qui proposent l'approximation suivante de $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \gamma_i$:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \gamma_i \approx \hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{i=1}^q \left(1 - \frac{i}{q+1} \right) \hat{\gamma}_i,$$

où

$$\hat{\gamma}_i = \frac{1}{N} \sum_{t=T-N+1+i}^T (X_t - \bar{X})(X_{t-i} - \bar{X}).$$

On a par exemple :

$$\text{Var} \left(\frac{1}{N} \sum_{t=T-N+1}^T X_t \right) \approx \frac{1}{N} \underbrace{\left(\hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{i}{k+1} \right) \hat{\gamma}_i \right)}_{=\hat{V}}.$$

Typiquement, un intervalle de confiance à 95% approché de $\mathbb{E}(X_t)$ est donné par :

$$\left[\bar{X} - 1.96\sqrt{\hat{V}}, \bar{X} + 1.96\sqrt{\hat{V}} \right].$$

Ce qui précède peut par exemple être utilisé pour approcher l'écart-type de la moyenne des output gaps estimés. Dans ce cas, on aura $X_t = y_t - y_t^*$ où y_t^* est une estimation du PIB potentiel. On peut aussi utiliser ce résultat pour déterminer l'ordre de grandeur de la moyenne des $(\Delta\Delta y_t^*)^2$, sur laquelle est fondée la mesure de RSS Diff.-in-Diff (voir Encadré 2).

14. C'est-à-dire $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |\gamma_i| < \infty$.

G Randwert-Instabilität et capacité à retrouver la tendance

Cette annexe détaille les calculs sous-jacents à l'analyse présentée dans l'Encadré 5. La mesure de capacité à retrouver le PIB potentiel (équation 2) est fondée sur l'équation (a.32). La sous-section suivante précise le calcul de la mesure de Randwert-Instabilité. La sous-section G.2 décrit ensuite comment l'approche par filtre de Kalman est mise en oeuvre.

G.1 Calcul des mesures de Randwert-Instabilité et de capacité à retrouver la tendance

On suppose que, à chaque date t , l'information utilisée pour déterminer le PIB potentiel est $\{y_{t-q}, \dots, y_t\}$. Pour une méthode donnée, on suppose que l'estimation de chacun des $q+1$ derniers PIB potentiels (de $t-q$ à t), est donnée par $\theta^{(h)}(L)y_t$, où $\theta^{(h)}(L)$ est un polynôme de degré h . On note que $\theta^{(0)}(L) \equiv \theta(L)$.

On peut noter que, pour les filtres purement récurrents, on a $\theta^{(h)}(L) \equiv \theta(L)L^h$ (on ne révisé pas ses estimations passées dans le cadre de ces filtres).

En exploitant ces notations, il vient que le Randwert-Instabilité peut être mesuré par $\text{Var}[\theta^{(h)}(L)y_t - \theta(L)y_{t-h}]$. Par le Lemme 2, en considérant des séquences (filtres) θ et θ^* de taille $q+1$:

$$\text{Var}[\theta^{(h)}(L)y_t - \theta(L)y_{t-h}] = (\mathbf{B}_{q+h}\boldsymbol{\xi})' \text{Var} \left(\mathbf{y}_{t-q-h+1}^t - \mathbf{y}_{t-q-h}^{t-1} \right) (\mathbf{B}_{q+h}\boldsymbol{\xi}), \quad (\text{a.85})$$

où

$$\begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{q+h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0^{(h)} \\ \vdots \\ \theta_q^{(h)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \theta_0 \\ \vdots \\ \theta_q \end{bmatrix}.$$

G.2 Filtre de Kalman

On utilise ici la notation usuelle (voir par exemple Kim et Nelson, 1999) selon laquelle, pour une variable latente z_t donnée, $z_{t|t+k}$ est l'espérance de z_t connaissant l'information disponible à la date $t+k$ (cette information est constituée de toutes les variables observables jusqu'à la date $t+k$). Notons que k peut être positif ou négatif. Avec ces notations, la mesure de Randwert-Instabilité (1) s'écrit :

$$\text{Var}(\tilde{y}_{t-h|t} - \tilde{y}_{t-h|t-h}).$$

Dans le cadre du modèle du décrit dans la section **B.1**, l'information disponible à la date t est $\{y_t, y_{t-1}, \dots\}$ (logarithmes passés et présent du PIB). Suivant (Kim et Nelson, 1999, chapitre 3), on note β_t le vecteur de variables latentes. Le modèle espace-état décrit en **B.1** peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} y_t &= B\beta_t + e_t \\ \beta_t &= \mu + F\beta_{t-1} + \eta_t \end{aligned}$$

avec $\text{Var}(e_t) = R = 0$ et $\text{Var}(\eta_t) = Q$. Rendons les matrices explicites ; on a :

$$y_t = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{=B} \begin{bmatrix} \tilde{y}_t \\ c_t \\ g_t \\ \tilde{y}_{t-1} \\ \tilde{y}_{t-2} \\ \vdots \\ \tilde{y}_{t-h} \end{bmatrix} \quad (\text{a.86})$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{y}_t \\ c_t \\ g_t \\ \tilde{y}_{t-1} \\ \tilde{y}_{t-2} \\ \vdots \\ \tilde{y}_{t-h} \end{bmatrix}}_{=\beta_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mu \\ 0 \\ \mu \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\mu} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \rho & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \phi & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & & & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=F} \begin{bmatrix} y_{t-1}^* \\ c_{t-1} \\ g_{t-1} \\ \tilde{y}_{t-2} \\ \tilde{y}_{t-3} \\ \vdots \\ \tilde{y}_{t-h-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_t \\ \varepsilon_t \\ v_t \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{a.87})$$

et on a donc

$$Q = \text{Var}(\eta_t) = \text{Var} \left(\begin{bmatrix} v_t \\ \varepsilon_t \\ v_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \sigma_v^2 & 0 & \sigma_v^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma_v^2 & 0 & \sigma_v^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Les équations récursives du filtre de Kalman sont les suivantes (voir Kim et Nelson, 1999, sec-

tion 3.1.2) :

$$\beta_{t|t-1} = \mu + F\beta_{t-1|t-1} \quad (\text{a.88})$$

$$P_{t|t-1} = FP_{t-1|t-1}F' + Q \quad (\text{a.89})$$

$$K_t = P_{t|t-1}B'(BP_{t|t-1}B' + R)^{-1} \quad (\text{a.90})$$

$$\beta_{t|t} = \beta_{t|t-1} + K_t(y_t - B\beta_{t|t-1}) \quad (\text{a.91})$$

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - K_tBP_{t|t-1}, \quad (\text{a.92})$$

où $P_{t|t}$ (respectivement $P_{t|t-1}$) est la matrice de covariance de β_t connaissant $\{y_t, y_{t-1}, \dots\}$ (resp. $\{y_{t-1}, y_{t-2}, \dots\}$). Le filtre doit être initialisé avec $\beta_{0|0}$ et $P_{0|0}$. Le gain K_t converge vers une valeur K et les matrices de covariance $P_{t|t}$ et $P_{t|t-1}$ convergent respectivement vers des matrices P et P_+ . D'après les équations précédentes, ces matrices vérifient :

$$\begin{aligned} P_+ &= FPF' + Q \\ K &= P_+B'(BP_+B' + R)^{-1} \\ P &= P_+ - KBP_+, \end{aligned}$$

que l'on peut ré-écrire ainsi, en remplaçant P_+ :

$$\begin{aligned} K &= (FPF' + Q)B'(B(FPF' + Q)B' + R)^{-1} \\ P &= (FPF' + Q) - KB(FPF' + Q). \end{aligned}$$

Ces deux matrices peuvent être approchées en partant de valeurs arbitraires pour K_0 et P_0 et en appliquant les équations précédentes de façon récursive, un grand nombre de fois. C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} K_i &= (FP_{i-1}F' + Q)B'(B(FP_{i-1}F' + Q)B' + R)^{-1} \\ P_i &= (FP_{i-1}F' + Q) - K_{i-1}B(FP_{i-1}F' + Q). \end{aligned}$$

Une fois ces valeurs stationnaires obtenues, on peut déterminer la combinaison linéaire reliant $\beta_{t|t}$ à y_t et ses retards. Pour cela, on applique récursivement l'équation (a.91) pour obtenir :

$$\begin{aligned} \beta_{t|t} &= \mu + F\beta_{t-1|t-1} + K(y_t - B(\mu + F\beta_{t-1|t-1})) \\ &= Ky_t + (Id - KB)(\mu + F\beta_{t-1|t-1}) \\ &= Ky_t + (Id - KB)\mu + (Id - KB)F\beta_{t-1|t-1} \\ &= Ky_t + (Id - KB)\mu + (Id - KB)F(Ky_{t-1} + (Id - KB)\mu + (Id - KB)F\beta_{t-2|t-2}), \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned}
\beta_{t|t} &= Ky_t + (Id - KB)FKy_{t-1} + \\
&\quad (Id - KB)\mu + (Id - KB)F(Id - KB)\mu + \\
&\quad (Id - KB)F(Id - KB)F\beta_{t-2|t-2} \\
&= Ky_t + \Omega Ky_{t-1} + \\
&\quad (Id - KB)\mu + \Omega(Id - KB)\mu + \\
&\quad \Omega^2\beta_{t-2|t-2} \quad (\text{avec } \Omega = (Id - KB)F) \\
&= Ky_t + \Omega Ky_{t-1} + \dots + \Omega^h Ky_{t-h} \\
&\quad (Id + \Omega + \dots + \Omega^h)(Id - KB)\mu + \\
&\quad \Omega^{h+1}\beta_{t-h-1|t-h-1}.
\end{aligned}$$

Le premier élément du vecteur $\beta_{t|t}$ est l'espérance de \tilde{y}_t (le logarithme du PIB potentiel) conditionnellement à $\{y_t, y_{t-1}, \dots\}$ (ce qui est noté $y_{t,0}^*$ en utilisant les notations de l'Encadré 5), et le dernier élément du vecteur $\beta_{t|t}$ est l'espérance de \tilde{y}_{t-h} conditionnellement à $\{y_t, y_{t-1}, \dots\}$ (ce qui est noté $y_{t,h}^*$ en utilisant les notations de l'Encadré 5).