



31 décembre 2020

Filtres linéaires univariés récursivement optimaux

Ergänzungsbericht / Rapport complémentaire

Pierre-Alain Bruchez
Samuel Schmassmann

Hinweis: Dieser Bericht spiegelt die Meinungen der Autoren, jedoch nicht notwendigerweise die offiziellen Positionen des Amtes, des Departements oder des Bundesrats, wider. Für die in diesem Bericht vertretenen Thesen und allfällige Irrtümer sind in erster Linie die Autoren selbst verantwortlich.

Dieser Bericht sowie die darin enthaltenen Analysen sind unter hohem Zeitdruck entstanden. Zusammen mit dem Grundlagenbericht bildete dieser Ergänzungsbericht die Grundlage für die externen Gutachten.

Für eine Zusammenfassung des Projekts zur Analyse alternativer Verfahren zur Berechnung des Konjunkturfaktors, wird an dieser Stelle auf den Schlussbericht verwiesen.

Remarque: Ce rapport reflète les opinions des auteurs, mais pas forcément les positions officielles de l'office, du département ou du Conseil fédéral. Les thèses qui y sont défendues et les erreurs éventuelles relèvent avant tout de la responsabilité des auteurs.

Ce rapport et les analyses qu'il contient ont été élaborés dans des délais très serrés. Le rapport de base et le rapport complémentaire ont constitué le point de départ des expertises externes.

Un résumé du projet d'analyse de méthodes alternatives pour le calcul du facteur conjoncturel est disponible dans le rapport final.

Abstract

Nous calculons quatre filtres linéaires univariés qui minimisent chacun une fonction de coût lorsqu'il est appliqué récursivement sur une série particulièrement simple (généralement une marche d'escalier). Nous appliquons ensuite ces filtres optimaux à des séries qui ne sont pas particulièrement simples pour examiner dans quelle mesure l'optimalité sur une série simple est héritée sur une série plus complexe. Dans une étude précédente sur le frein à l'endettement suisse, nous avons obtenu des résultats préliminaires sur l'un de ces quatre filtres pour le calcul du PIB trend. Nous avons trouvé que certaines paramétrisations de ce filtre optimal donnent à la fois un PIB trend plus lisse et un output gap moyen plus proche de zéro que toutes les alternatives que nous avons étudiées précédemment. Il apparaît que cette supériorité n'est pas robuste. De plus, l'évolution temporelle du PIB trend n'est pas toujours optimale. Le filtre optimal que nous avons signalé reste toutefois un bon candidat.

Table des matières

1	Introduction	4
2	Résultats préliminaires.....	7
2.1	PIB trend sur une marche d'escalier	7
2.2	Symétrie des filtres linéaires univariés	8
3	Les filtres optimaux	9
3.1	ROLUFhp.....	9
3.2	ROLUFdd.....	11
3.3	ROLUFd.....	12
3.4	ROLUFmgdd.....	13
4	Application au frein à l'endettement	15
4.1	Motivation du ROLUF dans le cadre de nos travaux sur le frein à l'endettement.....	15
4.2	ROLUFdd est dans la plupart des cas le meilleur ROLUF sur la série historique 2004-2019.....	16
4.3	Des résultats peu robustes	22
4.4	Evolution temporelle	26
4.5	Intégration du Kurzarbeit.....	30
4.6	Conclusion	31
5	Conclusion	33
	Annexe I : Démonstration de la formule de ROLUFhp	34
I.1 :	Reformulation du problème d'optimisation.....	34
I.2 :	Polynôme caractéristique	35
I.3 :	Solution pour $\gamma = 0$	37
I.4 :	Solution pour $\gamma \neq 0$	43
	Annexe II : Démonstration de la formule de ROLUFd	47
	Annexe III : Démonstration de la formule de ROLUFmgdd.....	50
	Annexe IV : MHP	61
	Annexe V : Graphs en complément de ceux fournis au §4.	62

1 Introduction

Il est souvent utile de calculer un trend pour lisser une série. Ce trend peut être calculé avec un filtre univarié, tel que le filtre HP de Hodrick-Prescott. Ce filtre minimise une fonction de coût constituée de deux composantes : la première demande que le trend soit proche de la série sur laquelle le filtre est appliqué, alors que la seconde demande que le trend soit lisse. Le trend calculé par HP résulte du compromis entre ces deux exigences dont le poids relatif est déterminé par un smoothing parameter λ (quand $\lambda = 0$ seule la première composante figure dans la fonction de coût et le trend est égal à la série sur laquelle le filtre est appliqué, quand $\lambda = \infty$ l'exigence d'un trend lisse est déterminante et le trend est une droite). Le filtre HP est donc le filtre optimal qui minimise cette fonction de coût.

Cette optimisation est toutefois effectuée en application ex-post, c'est-à-dire une fois que toute la série est connue. Ceci convient pour des analyses rétrospectives. Mais que faire pour une utilisation en temps réel où, pour calculer le trend courant, l'on ne dispose de la série que jusqu'à l'année courante ? Tel est le cas pour le frein à l'endettement utilisé en Suisse qui fixe un plafond des dépenses égal aux recettes prévues multipliées par un coefficient k égal au ratio du PIB trend sur le PIB effectif. Tel est plus généralement le cas chaque fois que l'on s'intéresse à une année qui, comme l'année courante, se déplace chaque année d'une année. C'est ce que nous nommons l'application récursive. La question est : quel est le filtre (linéaire univarié) optimal en application récursive (plutôt qu'ex-post) ?

Plusieurs approches peuvent être envisagées. La première est de conserver HP en espérant qu'en application récursive il héritera significativement de son optimalité ex-post. C'est le choix effectué dans le cadre du frein à l'endettement, à la nuance près que ce filtre a été légèrement modifié (MHP) pour gérer sa tendance à donner aux extrémités un PIB trend trop proche de la série sur laquelle le filtre est appliqué (end-point bias). Une autre approche consiste à chercher un filtre optimal en application récursive (qui minimise par exemple la fonction de coût de HP). Un filtre récursivement optimal sur une série donnée, ne le sera toutefois pas nécessairement sur une autre série (alors que HP est ex-post optimal sur toutes séries). On peut toutefois calculer le filtre récursivement optimal sur une série particulière, par exemple une marche d'escalier, et espérer que ce filtre héritera significativement de cette optimalité quand on l'applique sur une autre série. Nous avons donc le choix entre deux paris : i) qu'un filtre optimal ex-post hérite significativement de son optimalité en application récursive et ii) qu'un filtre récursivement optimal sur une série simple hérite significativement de son optimalité sur une série plus complexe. C'est ce deuxième pari que nous étudions dans le présent papier. Nous nous limitons ici aux filtres univariés, et plus spécifiquement aux filtres linéaires univariés. Nous nommerons de tels filtres ROLUF (pour Recursively Optimal Linear Filter) en complétant le nom par une indication sur la fonction de coût minimisée.

Sur nos quatre ROLUF, trois minimisent leur fonction de coût sur une marche d'escalier. La marche d'escalier est choisie parce que i) c'est l'exemple le plus simple et ii) toute série (partout discontinue) peut être écrite comme un somme de marches d'escalier. Comme nous ne considérons que des filtres linéaires, le trend d'une série est la somme des trends des marches d'escalier qui la compose. Ceci n'implique toutefois pas nécessairement que le filtre optimal sur une marche d'escalier sera aussi optimal sur une somme de marches d'escalier considérée durant une période donnée. En effet, le filtre optimal minimise la fonction de coût sur une période infinie (seule compte en fait la période où le trend diffère de la série sous-jacente : le trend étant égal à la série sous-jacente quand le choc de la marche n'apparaît pas encore ou plus dans la fenêtre temporelle sur laquelle le filtre est appliqué, la contribution à la fonction de coût devient nulle pour toute fonction de coût qui est nulle quand le trend est une droite égale à la série sous-jacente). Pour les marches situées suffisamment proche de la fin de période de la série, le filtre ne prendra en compte qu'une partie de leurs implications : ces marches n'auront pas encore été complètement « digérées ». Le filtre serait bien optimal sur une série quelconque se terminant par une phase suffisamment longue où la série est constante, mais ceci ne se produit pas en réalité dans les applications pratiques.

Nous cherchons d'abord le filtre **ROLUFhp** qui minimise la fonction de coût de HP sur une marche d'escalier. Nous avons ensuite voulu modifier la première composante de la fonction de coût utilisée par HP pour la remplacer par un terme qui demande que le trend passe au milieu de la série dans le sens que la somme des écarts à la série soit nulle. La motivation de cette modification provient du frein à l'endettement. Les écarts entre le PIB trend et le PIB effectif vont se traduire par des déficits autorisés ou des surplus exigés. Or l'article constitutionnel qui fonde le frein à l'endettement exige que sur le long terme les surplus compensent les déficits. Ceci correspond à l'exigence que les écarts entre le trend et la série sur laquelle le filtre est appliqué s'annulent. Nous n'avons par contre pas de raisons de vouloir que le PIB trend soit proche du PIB effectif. Au contraire, cette exigence pourrait nous conduire à tenir insuffisamment compte de la conjoncture. Il est vraisemblable qu'aussi dans d'autres domaines on attend d'un trend surtout qu'il soit lisse et que la moyenne de ses écarts par rapport à la série sur laquelle le filtre est appliqué soit nulle. Nous avons toutefois découvert que ce n'est pas difficile pour un filtre univarié linéaire d'avoir un écart moyen nul quand il est appliqué sur une marche d'escalier et ceci même en application récursive. Tous les filtres univariés linéaires dont le trend d'une droite est cette droite (ce que l'on est en droit d'attendre d'un véritable filtre sensé lisser une série) ont cette propriété. A partir de là, nous avons deux possibilités : i) maintenir la nouvelle fonction de coût avec sa nouvelle composante en l'appliquant à une série légèrement plus complexe qu'une marche d'escalier, un coude (**ROLUFmgdd**, minimise une fonction de coût constituée d'une première composante liée au *Mean Gap* entre le trend et la série sous-jacente et d'une seconde composante mesurant la volatilité du PIB trend par sa seconde différence *Diff de Diff*) et ii) oublier la première composante de la fonction de coût de HP en considérant que les filtres linéaires univariés (du moins ceux dont le trend d'une droite est cette droite) satisfont de toutes façons la première exigence (**ROLUFdd**, minimise *Diff de Diff* : c'est simplement **ROLUFhp** pour $\lambda = \infty$).

Lors de nos travaux sur le frein à l'endettement, la question a émergé de savoir si la deuxième composante de la fonction de coût de HP est la façon adéquate de demander un trend lisse. Cette composante est la variance des coudes. Par « coude », nous entendons les différences de différences, c'est-à-dire les modifications de variation annuelle entre deux dates consécutives.¹ Une mesure alternative serait la variance des variations du trend d'une période à la suivante (la variance des différences). Ces deux mesures ne sont pas identiques. Ainsi, si 20 données de variations annuelles consistent en 10 données nulles et 10 données de valeur 1, alors leur variance sera indépendante de la répartition temporelle de ces données : ce sera la même si les 0 alternent avec les 1 ou s'il y a d'abord une série de dix 0 suivies de dix 1. Pour la mesure selon HP par contre, ce sont les coudes qui importent. Elle considérera donc que dix 0 suivis de dix 1 (où il n'y a qu'un seul coude) est moins volatile qu'une alternance de 0 et de 1 (où il y a constamment des coudes). Nous nommons **ROLUFd** le filtre linéaire univarié qui minimise sur une marche d'escalier la volatilité du trend mesurée par la variance de sa *Différence*.

¹ Wird der Filter auf eine logarithmierte Reihe angewendet, entspricht dies approximativ der Varianz der Veränderungen der Wachstumsraten der Ursprungsserie (nicht logarithmiert).

Le tableau suivant résume les filtres optimaux en application récursive que nous étudions dans ce papier.

Filtres linéaires univariés optimaux en application récursive		Série sur laquelle la fonction de coût est optimisée	
		Marche d'escalier	Coude
Fonction de coût	Coût de HP	ROLUFhp	
	Uniquement la 2 ^{ème} composante du coût de HP	ROLUFdd =ROLUFhp($\lambda = \infty$)	
	Variance des différences du trend	ROLUFd	
	Coût de HP où la 1 ^{ère} composante est remplacée par la symétrie des écarts entre le trend et la série sous-jacente		ROLUFgmdd

D'autres variantes sont imaginables, mais celles-ci nous semblent particulièrement pertinentes. Chacun de ces quatre types de ROLUF constitue une famille de filtres qui se distinguent par la taille N de la fenêtre temporelle sur laquelle le filtre est appliqué (de $t - N$ à t , donc $N + 1$ points). ROLUFhp et ROLUFgmdd ont aussi un paramètre de la fonction de coût : le smoothing parameter λ .

Au §2 nous présentons quelques résultats préliminaires sur les filtres linéaires appliqués sur une marche d'escalier. En particulier le fait que, même en application récursive, la somme des écarts entre le trend et la série sous-jacente est nulle sur une marche d'escalier. Au §3 nous présentons les différents filtres optimaux de façon plus formelle et indiquons les formules pour les calculer. Les démonstrations sont disponibles en annexes. L'Annexe I démontre les formules pour ROLUFhp, y compris le cas $\gamma = \frac{1}{\lambda} = 0$ correspondant à ROLUFdd. Les Annexes II et III fournissent les démonstrations pour ROLUFd et ROLUFgmdd (l'Annexe IV donne par contre des indications sur un filtre d'optimisation ex-post : MHP). Le §4 applique ces filtres dans le contexte du calcul du PIB trend pour le frein à l'endettement. Le §5 propose des conclusions.

2 Résultats préliminaires

2.1 PIB trend sur une marche d'escalier

Soit x_t la série sur laquelle le filtre est appliqué. Le trend selon un filtre linéaire univarié peut s'écrire $\tau_t = \sum_{j=0}^N [\theta_j x_{t-N+j}]$ où N désigne la taille de la fenêtre temporelle sur laquelle le filtre est appliqué (allant de $t - N$ à t , et comprenant donc $N + 1$ points). Les θ_j sont les poids qui caractérisent le filtre. Nous exprimons le trend sur une marche d'escalier en fonction de ces poids en exigeant (ce qui est naturel pour un trend) que le filtre est tel que le trend d'une droite est cette droite. Pour commencer, nous montrons ce qu'implique cette exigence.

a) Le trend d'une droite est cette droite

Montrons que

$$\text{Le trend d'une droite est cette droite} \Leftrightarrow \sum_{j=0}^N \theta_j = 1 \text{ et } \sum_{j=0}^N [j * \theta_j] = N$$

Preuve :

Soit une droite donnée par $a * t + b$

$$\begin{aligned} a * t + b = \tau_t &= \sum_{j=0}^N \{\theta_j [a * (t - N + j) + b]\} = a \left\{ (t - N) \sum_{j=0}^N [\theta_j] + \sum_{j=0}^N [\theta_j * j] \right\} + b \sum_{j=0}^N \theta_j \\ &\Rightarrow \sum_{j=0}^N \theta_j = 1 \text{ et } \sum_{j=0}^N [j * \theta_j] = N \end{aligned}$$

b) Considérons la marche d'escalier suivante ²

$$\begin{cases} x_j = 1 \text{ si } j < 0 \\ x_j = 0 \text{ si } j \geq 0 \end{cases}$$

Supposons que le filtre est non seulement linéaire, mais aussi tel que le trend d'une droite soit cette droite (ce qui implique notamment que $\sum_{j=0}^N \theta_j = 1$). Pour $t < 0$ et $t \geq N$ le filtre ne voit qu'une droite horizontale dans sa fenêtre. Le trend est alors égal à la hauteur de cette droite (1 pour $t < 0$ et 0 pour $t \geq N$). Entre ces deux valeurs, $\tau_t = \sum_{j=0}^{N-t-1} \theta_j$ puisqu'au temps t les $t + 1$ dernières valeurs de la série visible dans la fenêtre du filtre sont nulles. Nous pouvons réécrire ce trend $\tau_t = \sum_{j=0}^{N-t-1} \theta_j = 1 - \sum_{j=N-t}^N \theta_j$.

² Nommons $M_o(t)$ cette marche d'escalier. Le trend sur n'importe quelle marche d'escalier M peut être calculé connaissant le trend sur cette marche. En effet, toute marche d'escalier peut être obtenue à parti de M_o multipliée par un facteur et translatée verticalement et horizontalement. Une marche quelconque peut donc s'écrire $M(t) = \alpha + \gamma * M_o(t - \beta)$. Comme nous ne considérons que des filtres linéaires, le trend M se déduit du trend de M_o : $\tau_{M,t} = \alpha + \gamma * \tau_{M_o,t-\beta}$. Le filtre optimal sur M_o le sera-t-il aussi sur M ?

Notons que $\tau_{M,t} - \tau_{M,t-1} = \gamma * (\tau_{M_o,t-\beta} - \tau_{M_o,t-1-\beta})$ et $\tau_{M,t} - M_t = \gamma * (\tau_{M_o,t-\beta} - M_{o,t-\beta})$. Le filtre qui minimise une fonction de coût telle que HP sur M_o la minimisera donc aussi sur une marche d'escalier quelconque. Ceci est valable pour toutes les fonctions de coût que nous considérons. Une fonction de coût raisonnable ne devrait effectivement pas être modifiée par une translation et devrait être invariante à un facteur multiplicatif près suite à un scaling d'un axe.

Nous avons donc :

$$\tau_t = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 0 \\ 1 - \sum_{j=N-t}^N \theta_j = \sum_{j=0}^{N-t-1} \theta_j & \text{si } 0 \leq t \leq N \\ 0 & \text{si } t \geq N \end{cases}$$

A partir de $t = N$ (compris), le trend est égal à la série sur laquelle le filtre est appliqué.

Pour $0 \leq t \leq N$ on obtient $\tau_t - \tau_{t-1} = \sum_{j=0}^{N-t-1} \theta_j - \sum_{j=0}^{N-(t-1)-1} \theta_j = -\theta_{N-t}$.

Les autres $\tau_t - \tau_{t-1}$ sont nuls.

2.2 Symétrie des filtres linéaires univariés

Les filtres linéaires univariés sont très symétriques : dans le cas d'une marche d'escalier, le gap cumulé est exactement nul après N périodes. La somme des gaps est donc nulle même en application récursive pour une marche d'escalier.

La démonstration est simple. Le gap est nul pour $t < 0$ et pour $t \geq N$ parce que le filtre ne voit qu'une droite dans sa fenêtre (et que le trend est donc égal à la série sous-jacente). Entre les deux, le trend en t est donné par le trend $\sum_{j=0}^{N-t-1} \theta_j$. Ce trend est égal au gap puisque la série sous-jacente est nulle dans cet intervalle. Le gap cumulé est donc :

$$\sum_{t=0}^{N-1} \left[\sum_{j=0}^{N-t-1} \theta_j \right] = \text{somme des termes suivants}$$

θ_{N-1}				...			
θ_{N-2}	θ_{N-2}			...			
θ_{N-3}	θ_{N-3}	θ_{N-3}		...			
...
θ_2	θ_2	θ_2	...	θ_2			
θ_1	θ_1	θ_1	...	θ_1	θ_1		
θ_0	θ_0	θ_0	...	θ_0	θ_0	θ_0	θ_0

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=0}^{N-1} \theta_j (N-j) = N \sum_{j=0}^{N-1} \theta_j - \sum_{j=0}^{N-1} [j * \theta_j] = N \left(-\theta_N + \sum_{j=0}^N \theta_j \right) - \left(-N\theta_N + \sum_{j=0}^N [j * \theta_j] \right) \\ &= N(-\theta_N + 1) - (-N\theta_N + N) = 0 \end{aligned}$$

3 Les filtres optimaux

3.1 ROLUFhp

Nous cherchons le filtre univarié linéaire qui, appliqué récursivement à une série x en forme de marche d'escalier sur une fenêtre allant de $t-N$ à t (comprenant donc $N+1$ points), donne un trend τ_t qui minimise la fonction de coût suivante:

$$\min_{\tau} \left\{ \sum_{t=-\infty}^{\infty} (x_t - \tau_t)^2 + \lambda \sum_{t=-\infty}^{\infty} [(\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1})]^2 \right\}$$

La première somme va en fait de $t = 0$ à $N - 1$ (les autres termes sont nuls) et la seconde de $t = -1$ à N .

Comme c'est la fonction de coût que le filtre HP minimise ex-post nous nommons ROLUFhp($\lambda;N$) ce filtre optimal : Recursively Optimal Linear Univariate Filter HP. Soulignons qu'il s'agit ici d'une minimisation en application récursive.

Solution

$\tau_t = \sum_{j=0}^N [\theta_j x_{t-N+j}]$ où les poids θ_j sont donnés par (voir annexes I) :

$\gamma = 0$ (le smoothing parameter λ est ∞)

$$\theta_k = \beta_0 + \alpha_1 k + \alpha_2 k^2 + \alpha_3 k^3$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ N \end{bmatrix}$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 2 & N & N^2 & N^3 & N+1 & \frac{N(N+1)}{2} \\ N & N(N+1) & N^2(N+1) & N^3(N+1) & \frac{N(N+1)}{2} & \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) \\ N^2 & N^2(N+1) & N \left[N^3 + \frac{(2N-1)(2N+1)}{3} \right] & N^2 \left(N^3 + \frac{3N^2-1}{2} \right) & \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) & \frac{1}{4}N^2(N+1)^2 \\ N^3 & N^3(N+1) & N^2 \left(N^3 + \frac{3N^2-1}{2} \right) & N \left[N^5 + \frac{9}{5}N^4 - N^2 + \frac{1}{5} \right] & \frac{1}{4}N^2(N+1)^2 & \frac{1}{30}N(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1) \\ N+1 & \frac{N(N+1)}{2} & \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) & \frac{1}{4}N^2(N+1)^2 & 0 & 0 \\ \frac{N(N+1)}{2} & \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) & \frac{1}{4}N^2(N+1)^2 & \frac{1}{30}N(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\gamma \neq 0$

$$\theta_k = \alpha_0 r_0^k + \alpha_1 r_1^k + \alpha_2 r_2^k + \alpha_3 r_3^k$$

où $r_0 = \frac{2+i\sqrt{\gamma}+\sqrt{(2+i\sqrt{\gamma})^2-4}}{2}$, $r_1 = \bar{r}_0$ est son complexe conjugué, $r_2 = r_0^{-1}$ et $r_3 = \bar{r}_0^{-1}$ (les r sont constitués d'un couple de complexes conjugués et de leur inverse) et les α sont donnés par :

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0(0) & f_0(1) & f_0(2) & f_0(3) & \psi_N(r_0) & \tilde{\psi}_N(r_0) \\ f_1(0) & f_1(1) & f_1(2) & f_1(3) & \psi_N(r_1) & \tilde{\psi}_N(r_1) \\ f_2(0) & f_2(1) & f_2(2) & f_2(3) & \psi_N(r_2) & \tilde{\psi}_N(r_2) \\ f_3(0) & f_3(1) & f_3(2) & f_3(3) & \psi_N(r_3) & \tilde{\psi}_N(r_3) \\ \psi_N(r_0) & \psi_N(r_1) & \psi_N(r_2) & \psi_N(r_3) & 0 & 0 \\ \tilde{\psi}_N(r_0) & \tilde{\psi}_N(r_1) & \tilde{\psi}_N(r_2) & \tilde{\psi}_N(r_3) & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ N \end{bmatrix}$$

où

$$\psi_N(x) \equiv \sum_{k=0}^N x^k = \begin{cases} \frac{1-x^{N+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ N+1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$\tilde{\psi}_N(x) \equiv \sum_{k=0}^N kx^k = \begin{cases} \frac{x}{1-x} \left[\frac{1-x^N}{1-x} - x^N N \right] & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{N(N+1)}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_i(k) &= r_i^N r_k^N + 1 + \Phi_N(r_k, r_i) + \gamma \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} (\psi_{N-j-1}(r_k) \psi_{N-j-1}(r_i)) \right\} \\ &= r_i^N r_k^N + 1 + \Phi_N(r_k, r_i) \\ &\quad + \gamma \left\{ \frac{1}{(1-r_i)(1-r_k)} [N - r_k^N \psi_{N-1}(r_k^{-1}) - r_i^N \psi_{N-1}(r_i^{-1}) \right. \\ &\quad \left. + (r_i r_k)^N \psi_{N-1}(r_i^{-1} r_k^{-1}) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_N(r_i, r_j) &\equiv \sum_{k=1}^N [(r_i^k - r_i^{k-1})(r_j^k - r_j^{k-1})] = (1-r_i)(1-r_j) \sum_{k=0}^{N-1} (r_i r_j)^k \\ &= \begin{cases} (1-r_i)(1-r_j) \frac{1-(r_i r_j)^N}{1-r_i r_j} & \text{si } r_i r_j \neq 1 \\ (1-r_i)(1-r_j)N & \text{si } r_i r_j = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

3.2 ROLUFdd

Nous cherchons à calculer analytiquement ROLUFdd (N), le filtre univarié linéaire optimal appliqué sur une fenêtre de largeur N (allant de t-N à t et comprenant donc N+1 points) qui minimise récursivement la volatilité de son trend mesurée par la somme des carrés des secondes différences:

$$\min_{\tau} \left\{ \sum_{t=-\infty}^{\infty} [(\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1})]^2 \right\}$$

La somme va en fait de $t = -1$ à N (les autres termes sont nuls).

Solution

$\tau_t = \sum_{j=0}^N [\theta_j x_{t-N+j}]$ où les poids θ_j sont donnés par les équations suivantes :

$$\theta_k = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 k^2 + \beta_3 k^3$$

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & N & N^2 & N^3 & N+1 & \frac{N(N+1)}{2} \\ N & N(N+1) & N^2(N+1) & N^3(N+1) & \frac{N(N+1)}{2} & \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) \\ N^2 & N^2(N+1) & N \left[N^3 + \frac{(2N-1)(2N+1)}{3} \right] & N^2 \left(N^3 + \frac{3N^2-1}{2} \right) & \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) & \frac{1}{4}N^2(N+1)^2 \\ N^3 & N^3(N+1) & N^2 \left(N^3 + \frac{3N^2-1}{2} \right) & N \left[N^5 + \frac{9}{5}N^4 - N^2 + \frac{1}{5} \right] & \frac{1}{4}N^2(N+1)^2 & \frac{1}{30}N(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1) \\ N+1 & \frac{N(N+1)}{2} & \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) & \frac{1}{4}N^2(N+1)^2 & 0 & 0 \\ \frac{N(N+1)}{2} & \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) & \frac{1}{4}N^2(N+1)^2 & \frac{1}{30}N(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1) & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -N \end{bmatrix}$$

Voir la démonstration dans l'Annexe I (où se trouve la démonstration de la formule pour ROLUFhp) dans la section concernant $\gamma = 0$.

3.3 ROLUFd

Nous cherchons le filtre univarié linéaire (et tel que le trend d'une droite est cette droite) qui donne un trend τ_t minimisant récursivement la fonction de coût suivante (volatilité du PIB trend mesurée par la variance des différences de trend entre deux périodes consécutives) sur une marche d'escalier :

$$\underset{\tau}{MIN} \left[\sum_{j=0}^N [(\tau_j - \tau_{j-1}) - \text{moyenne}(\tau - \tau_{\text{précédent}})]^2 \right]$$

ROLUFd(N) signifie Recursively Optimal Linear Univariate Filter qui minimise la variance de la première Difference du trend. Le filtre s'applique récursivement sur une fenêtre allant de $t - N$ à t (comprenant donc $N + 1$ points).

Solution

$\tau_t = \sum_{j=0}^N [\theta_j x_{t-N+j}]$ où les poids θ_j sont donnés par :

$$\theta_j = \frac{1 - N + 3j}{(1 + N) \left(1 + \frac{N}{2}\right)}$$

3.4 ROLUFmgdd

Nous cherchons le filtre univarié linéaire (et tel que le trend d'une droite est cette droite) qui donne un trend τ_t minimisant récursivement la fonction de coût suivante sur un coude (fonction de coût identique à celle de HP, sauf que la somme des carrés des output gaps a été remplacée par le carré de la somme des output gaps) :

$$\min_X \left\{ \left(\sum_{t=-\infty}^{\infty} (x_t - \tau_t) \right)^2 + \lambda \sum_{j=-\infty}^{\infty} [(\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1})]^2 \right\}$$

ROLUFmgdd(λ, N) signifie Recursively Optimal Linear Univariate Filter qui minimise une fonction de coût dont une composante est liée à l'output gap moyen (Mean Gap) et la seconde concerne la volatilité du PIB trend mesurée par la variance de la Différence de la Différence. Le poids relatif de ces deux composantes est déterminé par le smoothing paramer λ (plus λ est élevé, plus le poids relatif de la volatilité du PIB trend est élevé). Le filtre s'applique récursivement sur une fenêtre allant de $t - N$ à t (comprenant donc $N + 1$ points).

Solution

$\tau_t = \sum_{j=0}^N [\theta_j x_{t-N+j}]$ où les poids θ_j sont donnés par les équations suivantes :

$$\theta_0 = \frac{NB_1 - B_2 + C_1B_2 - B_1C_2}{A_2B_1 - A_1B_2}$$

$$\theta_1 = \frac{1 - \theta_0A_1 - C_1}{B_1}$$

$$\theta_k = \theta_0(1 - k) + \theta_1k + \frac{\Omega}{g(4) - g(3)} [N^2 - (g(2) - g(3))\theta_0 - g(3)\theta_1]k(k - 1)$$

$$A_1 = g(0) - g(1) - \Omega \frac{g(2) - g(3)}{g(4) - g(3)} (g(2) - g(1))$$

$$B_1 = g(1) - \Omega \frac{g(3)}{g(4) - g(3)} (g(2) - g(1))$$

$$C_1 = N^2 \Omega \frac{g(2) - g(1)}{g(4) - g(3)}$$

$$A_2 = g(1) - g(2) - \Omega \frac{g(2) - g(3)}{g(4) - g(3)} (g(3) - g(2))$$

$$B_2 = g(2) - \Omega \frac{g(3)}{g(4) - g(3)} (g(3) - g(2))$$

$$C_2 = N^2 \Omega \frac{g(3) - g(2)}{g(4) - g(3)}$$

$$\Omega = 1 - \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{4} (g(4) - g(3))}$$

$$g(i) = \sum_{k=0}^N k^i$$

$$g(0) = N + 1$$

$$g(1) = \frac{1}{2}N(N + 1)$$

$$g(2) = \frac{1}{6}N(N + 1)(2N + 1)$$

$$g(3) = \frac{1}{4}N^2(N + 1)^2$$

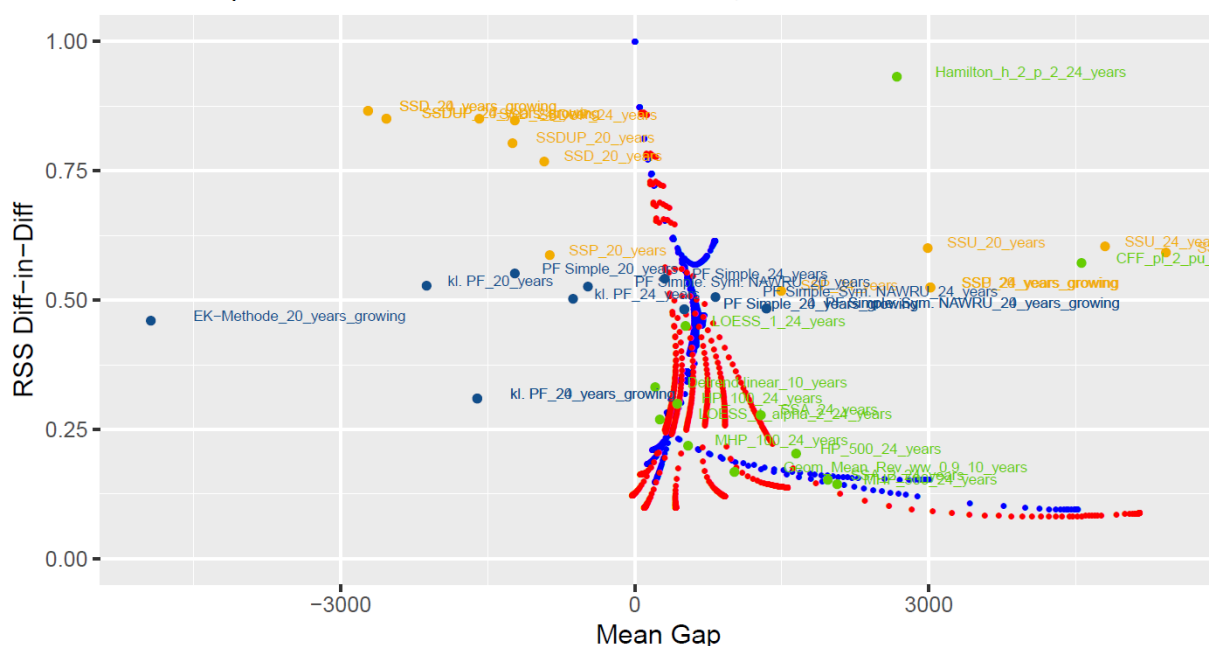
$$g(4) = \frac{1}{30}N(N + 1)(2N + 1)(3N^2 + 3N - 1)$$

4 Application au frein à l'endettement

4.1 Motivation du ROLUF dans le cadre de nos travaux sur le frein à l'endettement

Avec une co-auteure, nous avons dans Schmassmann et al. (2020) comparé diverses méthodes pour calculer le PIB trend : filtres univariés et multivariés, fonctions de production.³ MHP (100) est le filtre univarié actuellement utilisé en Suisse dans le cadre du frein à l'endettement au niveau fédéral (voir l'Annexe IV pour des précisions sur MHP). Nous avons très brièvement abordé l'idée d'utiliser un filtre récursivement optimal et décrit des résultats préliminaires concernant ROLUFhp (alors nommé « OLUFHP »). En particulier, la figure suivante présente l'output gap moyen en axe horizontal et la volatilité du PIB trend (mesurée en *diff* de *diff*) divisée par la volatilité du PIB en axe vertical. Chaque point correspond à une méthode appliquée récursivement sur (le log de) la même série historique de PIB réel suisse entre 2004 et 2019. L'arborescence en bleu représente MHP pour différentes paramétrisations. En rouge est représenté ROLUFhp. Dans le cadre du frein à l'endettement, $\langle 0;0 \rangle$ serait le point idéal à atteindre sur ce graphique. On constate que ROLUFhp est meilleur que les alternatives, en particulier avec la paramétrisation $N = 14$ (qui donne une window de $N + 1 = 15$) et $\lambda = \infty$. Ce point domine strictement (c'est-à-dire : est meilleur simultanément sur les deux axes) les diverses paramétrisations de MHP sauf quand λ est très faible (mais la volatilité du trend selon MHP est alors éliminatoire). ROLUFhp domine aussi les autres méthodes analysées.

Figure 1 : ROLUFhp permet un output gap moyen plus petit et un trend plus lisse
Mean Gap and RSS Diff-in-Diff: All Methods, MHP and OLUFHP



L'arborescence en rouge (resp. bleu) représente ROLUFhp (resp. MHP). Le point rouge le plus bas à proximité de l'origine est le filtre optimal pour $\lambda = \infty$ et $N = 14$ (window=15). Il domine strictement toutes les autres méthodes représentées (sauf quelques cas qui ont toutefois un trade-off volatilité / output gap extrêmement mauvais).

ROLUFhp paraissait donc très prometteur. Ce papier indiquait toutefois qu'il fallait i) vérifier la robustesse de la paramétrisation optimale, ii) examiner l'évolution temporelle de son PIB trend (alors que la figure ci-dessus ne présente que des moyennes sans montrer de timing), et éventuellement iii) intégrer le Kurzarbeit au meilleur filtre optimal (comme cela avait été fait pour MHP). C'est ces points que nous abordons maintenant.

³ Schmassmann Samuel, Bruchez Pierre-Alain et Sandra Wiedmer (2020), « Analyse alternativer Verfahren zur Berechnung des Konjunkturfaktors ».

4.2 ROLUFdd est dans la plupart des cas le meilleur ROLUF sur la série historique 2004-2019

La figure précédente montre l'intérêt des ROLUFhp avec $\lambda = \infty$. Ce cas particulier de ROLUFhp est ce que nous nommons ROLUFdd. Par ailleurs, il nous est paru utile de calculer aussi le filtre récursivement optimal qui minimise la volatilité du PIB trend mesurée par la variance de *diff* plutôt que par *diff* de *diff*. C'est ROLUFd. Finalement, nous avons aussi considéré le filtre ROLUFmgdd qui minimise la fonction de coût de HP, mais où la composante qui demande que le trend soit proche de la série sous-jacente est remplacée par la demande que les écarts entre le trend et la série sous-jacente soient symétriques, ce qui correspond mieux à l'axe horizontal de la figure précédente et aux exigences du frein à l'endettement (les output gaps conduisent à des soldes budgétaires qui doivent à terme s'annuler).

ROLUFdd (en particulier avec $\lambda = \infty$ et *window* = 15) est le meilleur des ROLUF

Figure 2, graph en haut à gauche

Chaque couleur représente une taille de *window* ($= N + 1$) sur laquelle le filtre est appliqué. Chaque point d'une courbe correspond à une valeur de λ . Le PIB trend de ROLUFhp est égal au PIB effectif lorsque $\lambda = 0$, ce qui donne une valeur égale à 1 sur l'axe vertical indiquant le rapport entre la volatilité du PIB trend et celle du PIB effectif. La volatilité du PIB trend tend à baisser lorsque λ augmente, souvent (mais pas toujours) au prix d'une augmentation de l'output gap moyen. Les valeurs pour $\lambda = \infty$ (ROLUFdd) sont indiquées par des triangles. Pour une *window* de 12, 14 ou 15, la convergence vers $\lambda = \infty$ permet de réduire à la fois la volatilité du PIB trend et l'output gap moyen (zone où les courbes sont croissantes). La paramétrisation $\lambda = \infty$ et *window* = 15 semble particulièrement intéressante. Il serait certes possible de réduire l'output gap moyen en choisissant une *window* de 12 ou 14, mais au prix d'une augmentation de la volatilité du PIB trend qui nous semble plus néfaste.

Figure 2, graph en haut à droite

A ROLUFhp discuté ci-dessus a été rajouté ROLUFd (en losanges). ROLUFhp tend à être meilleur que ROLUFd, parce que la volatilité de son PIB trend est plus faible. En particulier, ROLUFhp avec la paramétrisation $\lambda = \infty$ et *window* = 15 domine strictement tous les ROLUFd présentés.

Figure 2, graph en bas à droite

Les losanges rouges et verts correspondent respectivement à $\lambda = 100$ et 500. Ceci permet de s'orienter : l'extrémité du côté du losange rouge correspond à $\lambda = 0$. Contrairement à ce qui est le cas pour ROLUFhp, la valeur sur l'axe vertical n'est pas égale à 1 pour ROLUFmgdd quand $\lambda = 0$. En effet, le PIB trend n'est alors pas égal au PIB effectif, puisque la fonction de coût que ROLUFmgdd minimise n'exige pas un PIB trend proche du PIB effectif, mais seulement un output gap symétrique : la position sur l'axe vertical est inférieure à 1 parce que le PIB trend est plus lisse que le PIB effectif. Alors que l'output gap moyen devrait être nul pour $\lambda = 0$, nous observons que tel n'est pas le cas : cette propriété optimisée sur une série sous-jacente en forme de coude n'est pas parfaitement héritée sur une série quelconque. Pour de petites *windows* (12 et 14) l'output gap moyen se réduit même lorsque λ augmente.

Figure 2, en bas à gauche

On peut comparer ROLUFmgdd (même graph que précédemment, mais sans les losanges) et ROLUFhp (arborescence en rouge, les triangles représentent ROLUFdd). ROLUFdd est plus bas que ROLUFmgdd. En particulier, ROLUFhp avec la paramétrisation $\lambda = \infty$ et *window* = 15 domine les alternatives sur l'axe vertical et est suffisamment proche de zéro sur l'axe horizontal pour rester préférable aux alternatives, même celles qui le battent sur l'axe horizontal. Pour les *windows* 12 et 14, ROLUFhp a un output gap moyen plus bas que ROLUFmgdd (alors qu'il n'a pas été optimisé pour cela).

Figure 2 : Comparaison des ROLUF sur un graph <Mean gap ; RSS Diff-in-DIFF>

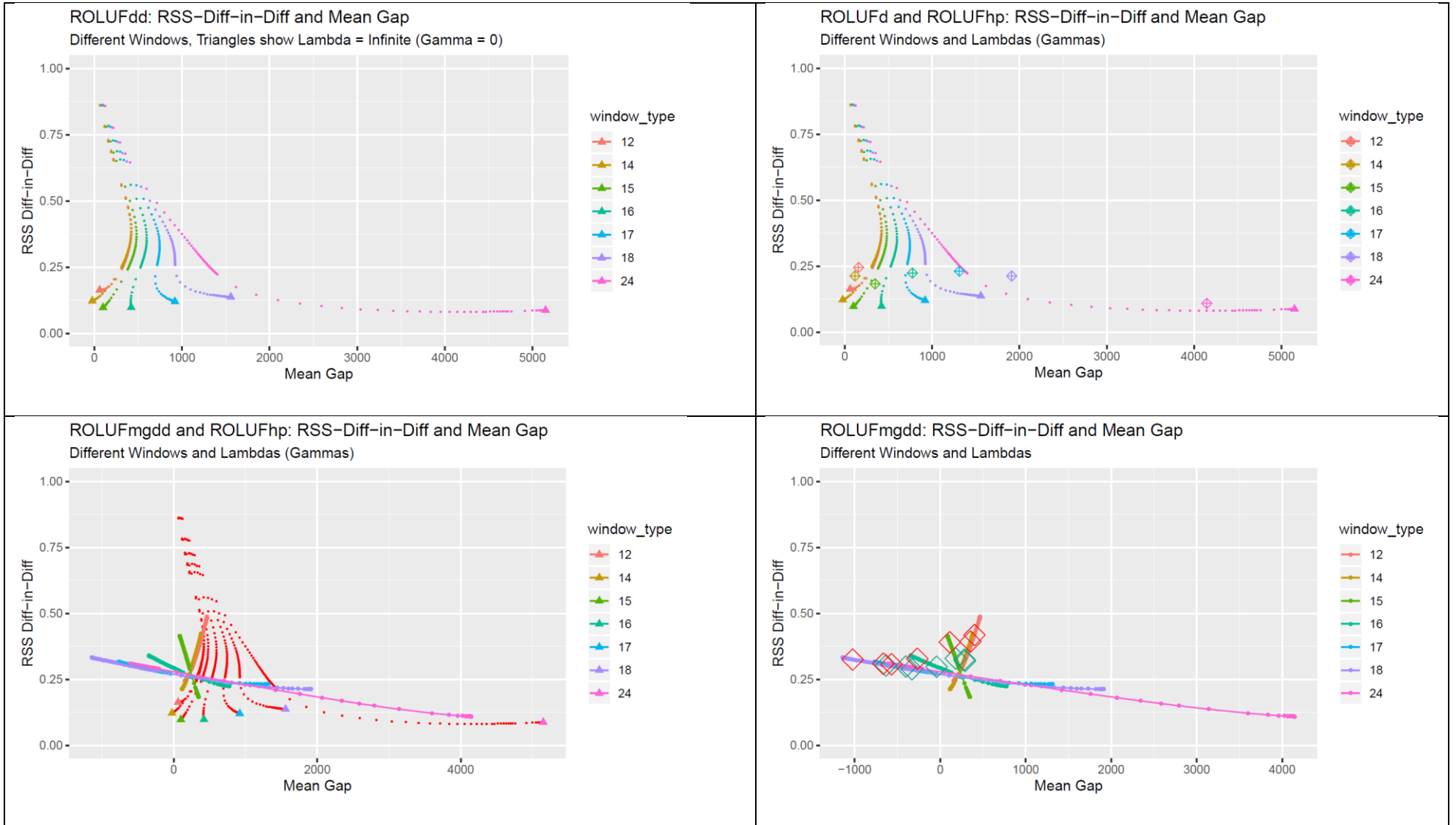
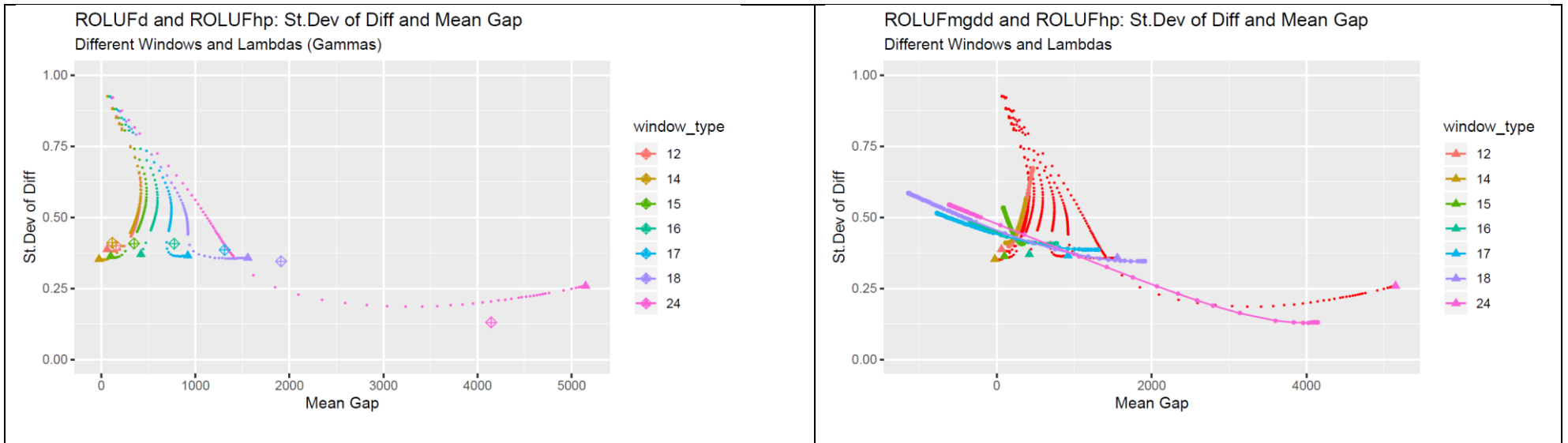


Figure 3 : ROLUFhp ROLUFd et ROLUFmgdd quand la volatilité est mesurée par l'écart-type de *diff*



Attention : la volatilité sur l'axe vertical est mesurée différemment que sur les graphes précédents

Figure 3, à gauche : comparaison avec ROLUFd

Le fait que ROLUFdd reste plus bas que ROLUFd sur la plupart des windows est particulièrement surprenant puisque ROLUFd minimise la volatilité du PIB trend mesurée par *diff*, alors que ROLUFdd minimise la volatilité mesurée par *diff* de *diff*. Une seule explication possible : appliqué à une série quelconque, ROLUFd hérite moins bien que ROLUFdd des propriétés optimisées sur une marche d'escalier.

Lorsque la volatilité est mesurée par *diff*, la window 24 a une volatilité nettement plus basse qu'avec de plus courtes windows (si on considère des λ suffisamment élevés). Nous observons ceci sur tous les ROLUF, ainsi que sur MHP (ci-dessous). Ceci contraste avec ROLUFdd pour une volatilité mesurée en *diff* de *diff* où la window 24 ne donnait pas une volatilité nettement plus basse et où ROLUFdd($\lambda = \infty$; *window* = 15) dominait strictement les alternatives, sauf celles dont la volatilité du PIB trend est de toute façon éliminatoire. La question maintenant est de savoir jusqu'à quel point un output gap élevé est tolérable. 4000 sur l'axe horizontal correspond à 4000 millions de CHF/an, donc 4 milliards CHF. Comme les recettes de la Confédération sont environ 10% du PIB, cela a un impact de 400 millions/an sur le solde budgétaire. Si l'importance accordée à une basse volatilité du PIB trend est telle qu'elle permette de négliger des output gaps moyens de cet ordre, alors il s'agit de trouver la méthode qui donne la plus basse volatilité. Parmi celles qui sont mentionnées sur ce graph, c'est ROLUFd avec window 24. La règle générale que ROLUFdd est le meilleur ROLUF doit donc être relativisée si les deux conditions suivantes sont réunies : c'est la mesure de la volatilité mesurée par *diff* qui est pertinente (plutôt que par *diff* de *diff*) et

ii) l'importance d'un mean gap de l'ordre de 4000 est négligeable. Il n'est pas évident que ces conditions soient remplies.

Figure 3, à droite : Comparaison avec ROLUFmgdd

Comme pour le graph de gauche, on observe aussi que la volatilité mesurée par *diff* est nettement plus basse pour la window 24 que pour de plus courtes windows (si on considère des λ suffisamment élevés). La même conclusion s'en suit : si on considère que la volatilité du PIB trend doit être mesurée par *diff* (plutôt que *diff* de *diff*) et si un output gap de l'ordre de 4 milliards CHF est jugé négligeable, alors $ROLUFmgdd(\lambda = \infty ; window = 24)$ est la meilleure spécification dans ce graph. Notons que $ROLUFmgdd(\lambda = \infty ; window = 24)$ et $ROLUFd(\lambda = \infty ; window = 24)$ sont situés quasiment au même point du graph. Il faudrait donc alors encore départager entre les deux.

Comme ROLUFhp et ROLUFmgdd diffèrent par la mesure liée au gap prise en compte dans la fonction de coût (pas par la mesure de volatilité), il peut sembler étrange qu'un changement de mesure de volatilité ait un impact dans la comparaison entre ces deux familles. Cela doit provenir du fait que pour ROLUFmgdd l'optimisation est faite sur un coude, alors que pour ROLUFhp c'est sur une marche d'escalier.

ROLUFhp est meilleur que MHP pour les deux façons de mesurer la volatilité du PIB trend

Figure 4, les deux graphs d'en haut : comparaison avec MHP

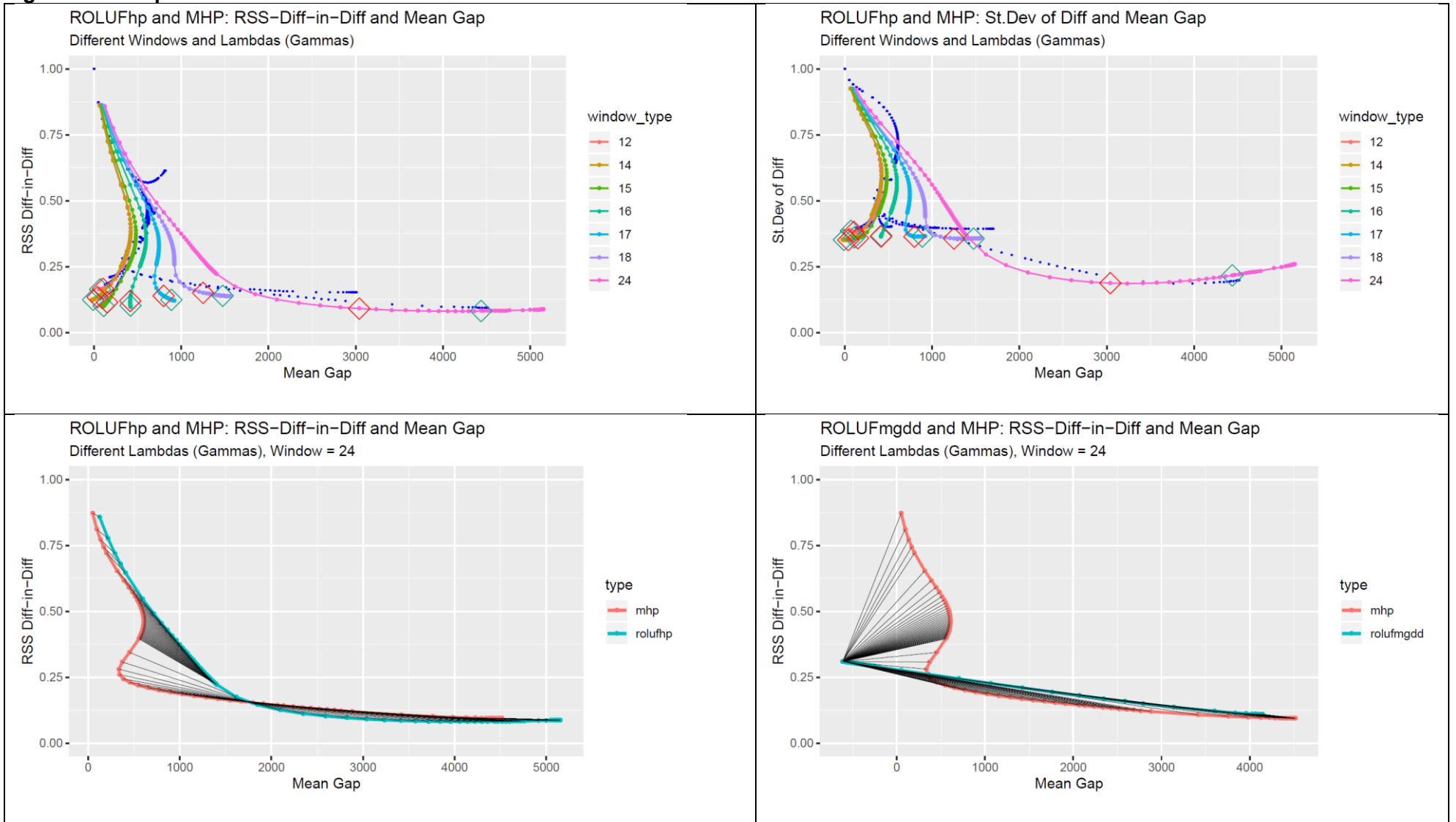
La Figure 4 montre que ROLUFdd est meilleur que MHP (l'arborescence bleue) quand la volatilité est mesurée par *diff* de *diff*, dans le sens que ROLUFdd avec paramétrisation $\lambda = \infty$ et $window = 15$ domine strictement tous les MHP (sauf certaines paramétrisation de MHP dont la volatilité du PIB trend est toutefois éliminatoire). Cette conclusion est moins nette quand la volatilité est mesurée par le *diff*. En effet, le window 24 conduit alors à une volatilité du PIB trend nettement plus basse qu'avec des fenêtres de plus petite taille. Ceci est vrai à la fois pour MHP et pour ROLUFhp. Cela a pour conséquence que $ROLUFdd(\lambda = \infty ; window = 15)$ ne domine plus si clairement l'ensemble des MHP : choisir un MHP avec fenêtre 24 permet de réduire sensiblement la volatilité du PIB trend, au prix toutefois d'une grande augmentation de l'output gap moyen. Mais ROLUFhp de window 24 avec $\lambda = 100$ (losange rouge) est meilleur que les MHP de window 24 et λ élevé (le ROLUFdd correspondant n'est pas contre pas bon). ROLUFhp reste un meilleur filtre que MHP, mais il n'est pas clair que $\lambda = \infty$ et $window = 15$ reste la meilleure paramétrisation quand la volatilité du trend est mesurée par *diff* plutôt que *diff* de *diff*.

Figure 4, les deux graphes d'en bas : comparaison avec MHP (restreint à window=24)

Ces deux graphes ne concernent que window=24. Les points d'une même courbe se distinguent par la valeur de λ . Les traits noirs relient des points de même λ . Un trait noir croissant signifie qu'un filtre domine strictement l'autre pour ce λ . Si la droite noire est décroissante, alors il y a par contre un trade-off. Il n'est toutefois pas sûr qu'il faille comparer des points de même λ puisque la fonction de coût minimisée n'est pas la même (la différence est particulièrement importante entre ROLUFmgdd et les deux autres filtres) et que les filtres ROLUF sont définis pour optimiser récursivement sur une série spécifique.

ROLUFhp n'est supérieur à MHP que pour des valeurs suffisamment grandes de λ . ROLUFmgdd est par contre supérieur à MHP pour des valeurs λ suffisamment faibles. La figure en bas à droite illustre bien le fait que ROLUFmgdd bouge d'abord peu quand λ s'éloigne de zéro (de multiples traits noirs partent du même point de ROLUFgmdd).

Figure 4 : Comparaison avec MHP



4.3 Des résultats peu robustes

Il est toujours dangereux d'extrapoler à partir d'un unique cas. Or c'est bien ce que nous avons fait au §4.2 où tous les résultats sont basés sur les données historiques de 2004 à 2019. Nous pouvons évaluer la robustesse de ces résultats en suivant différentes approches :

1. *Sous-séries*

La première approche consiste à étudier des sous séries de la série 2004-2019 (window historique=16). Nous pouvons par exemple étudier des sous-séries de 9 points consécutifs (window historique = 9, à ne pas confondre avec la window du modèle dont nous avons parlé jusqu'ici). De la série 2004-2019, nous pouvons extraire 8 sous-séries de window historique 9 : de 2004-2012 à 2011-2019. Nous pouvons examiner la robustesse des résultats lorsque la taille de la window historique reste constante, mais que les données changent. Nous pouvons aussi comparer différentes window historiques.

2. *Etendre la série 2004-2019*

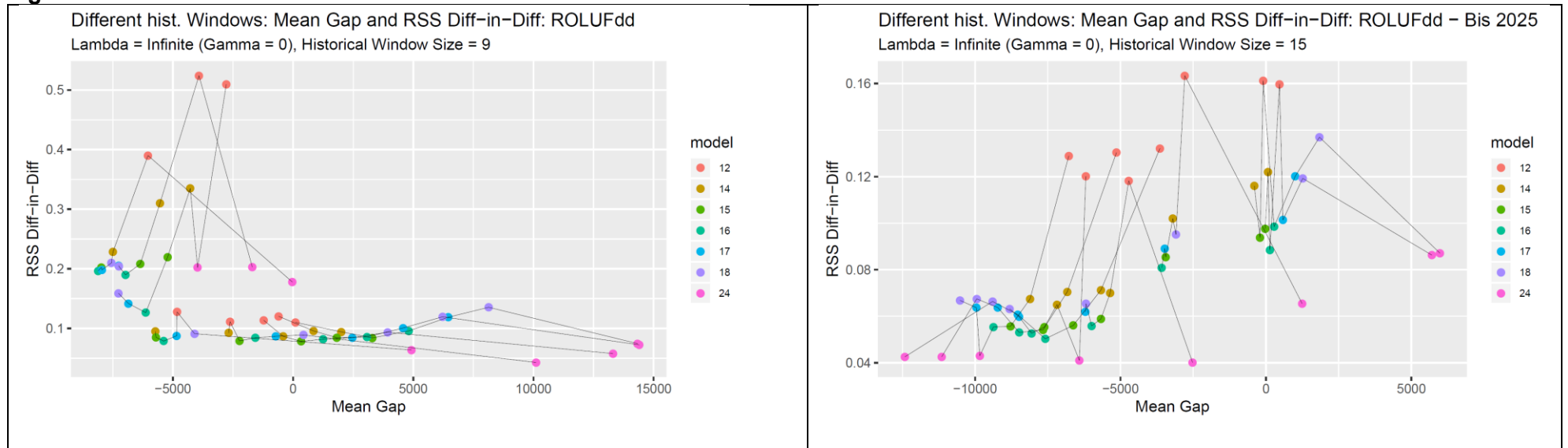
La série 2004-2019 pourrait être étendue dans le passé ou vers l'avenir (2020 touche à sa fin, et nous pouvons faire des prévisions pour l'avenir). Nous n'avons pas étendu dans le passé, mais par contre vers l'avenir. Ceci présente notamment l'intérêt d'intégrer la crise du Covid.

3. *Données artificielles randomisées*

La troisième approche consiste à construire des données artificielles basées sur un processus générateur qui aurait été particulièrement susceptible de produire les données historiques effectivement observées. Pour des précisions sur cette approche, consulter §5.2 de Schmassmann et al. (2020). Nous avons généré ainsi 500 cas. Les conclusions ne sont toutefois valables que dans la mesure où le processus générateur adopté reflète bien la réalité.

Le graph de gauche de la Figure 5 fournit un exemple de la première approche, le graph de droite de la seconde (plus exactement : des sous-séries sont extraites d'une série initiale étendue, ce qui permet de considérer des windows historiques plus larges). Une ligne noire relie des points calculés avec différentes paramétrisations de ROLUFdd, mais sur les mêmes données. Les couleurs des points désignent la paramétrisation (window model). L'annexe IV présente encore plusieurs graphiques du même type pour d'autres windows historiques. Il est difficile de tirer des conclusions nettes. Même en gardant la window historique constante (disons égale à 9), la position des points sur le graph dépend évidemment des données. Plus problématique : les courbes sont très irrégulières. On aurait pu espérer qu'elles soient constamment décroissantes (respectivement croissante) quand l'output gap est positif (respectivement négatif), reflétant ainsi un trade-off entre PIB trend lisse et output gap faible : plus un point correspond à un output gap proche de zéro, plus la volatilité de son PIB trend est élevée. On peut certes déceler une tendance dans cette direction, mais avec d'importantes irrégularités. A window historique constante, ce n'est pas toujours la même paramétrisation qui est optimale. Ce manque de robustesse de ROLUFdd est vraisemblablement une conclusion qui s'applique aussi à d'autres ROLUF et plus généralement à d'autres méthodes. Dans ce cas, ce serait davantage un rappel du danger de tirer des conclusions à partir de calculs sur une unique série, qu'une critique de ROLUFdd.

Figure 5 : Sous-séries de 2004-2019 et 2004-2025



Attention : les axes ne parcourent pas les mêmes valeurs dans les deux graphs (noter en particulier la valeur maximale de l'axe vertical).

L'Annexe V fournit des graphes similaires pour d'autres tailles de window historique. On observe que plus la window est étroite, plus la volatilité du PIB trend est élevée. Plus la window est large, plus l'output gap moyen est volatile.

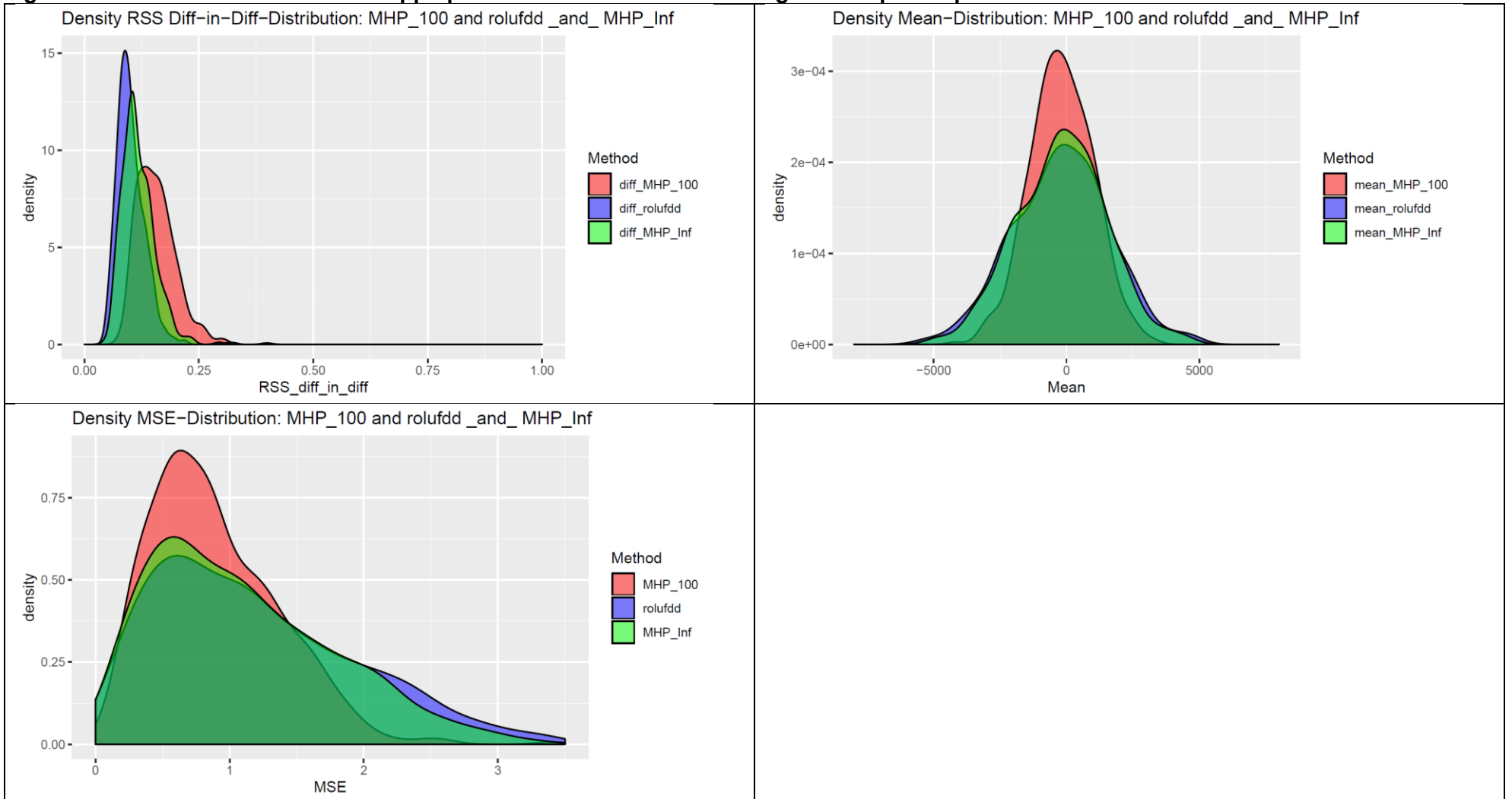
L'Annexe V inclut un graph similaire à la Figure 1, mais sur des données de PIB extrapolées jusqu'en 2025 (et indiquant moins de méthodes). Comme l'extrapolation est linéaire à partir de quelques années après la crise du Covid, les output gaps sont artificiellement faibles et les PIB trend lisses. Ce graph suggère toutefois aussi que les résultats ne sont pas robustes.

Figure 6

La Figure 6 ci-dessous résulte de la troisième approche. Puisque nous avons généré 500 séries, nous pouvons tracer la fonction de densité de certaines variables : i) « RSS-Diff-in-Diff » est la volatilité du PIB trend, ii) « Mean » mesure l'output gap moyen et iii) « MSE » mesure l'écart entre le PIB trend et le véritable PIB potentiel (connu par construction). La surface rouge correspond au filtre actuellement utilisé : MHP (100). La surface bleue est ROLUFdd(window = 15). La surface verte est MHP avec la même paramétrisation que ROLUFdd : $\lambda = \infty$ et window = 15. La différence entre le rouge et le vert est donc due à une modification de la paramétrisation, alors que la différence entre le vert et le bleu est due au passage de MHP à ROLUFdd (rappelons toutefois que nous n'avons pas démontré que c'est le même λ pour ROLUFdd qui correspond à un certain λ pour MHP).

ROLUFdd permet de réduire la volatilité du PIB trend, au prix toutefois d'un output gap plus dispersé autour de zéro : elle tend à avoir des valeurs plus éloignées de zéro que selon MHP (100) dans les réalisations (c'est-à-dire pour une série donnée), même si ces écarts à zéro selon les réalisations sont symétriques et tendent à s'annuler (il faut distinguer entre : i) la moyenne de l'output gap sur une série donnée et ii) la moyenne de ces moyennes sur les 500 séries). L'essentiel du changement est dû à la modification de la paramétrisation, plutôt qu'au passage de MHP à ROLUFdd. Par rapport à MHP avec paramétrisation identique, ROLUFdd permet toutefois de réduire la volatilité du PIB trend en ne pénalisant guère l'output gap moyen. Sous réserve que le processus que nous avons utilisé pour générer ces séries artificielles reflète bien la réalité, cela signifie que le fait que ROLUFdd permettait d'obtenir à la fois une plus faible volatilité du PIB trend que MHP (100) et un output gap plus proche de zéro dans la Figure 1 ne relevait que de la chance et ne se serait pas typiquement produit dans une autre réalisation.

Figure 6 : Densités tirées des filtres appliqués sur 500 séries artificielles générées par un processus randomisé



4.4 Evolution temporelle

Les graphiques présentés précédemment ne montrent pas explicitement l'axe du temps, mais sont basés sur des moyennes. Le timing est toutefois important. Nous présentons ici quelques graphiques montrant pour différentes windows (il s'agit ici de la window du modèle, pas de windows historiques) de ROLUFdd l'évolution du PIB effectif (en noir), du PIB trend (en rouge) et du coefficient k (égal au PIB trend divisé par le PIB effectif) utilisé pour calculer le plafond des dépenses dans le cadre du frein à l'endettement (en vert). D'autres graphes du même type sont présentés en Annexe V, ainsi que des graphes similaires pour MHP (à titre de comparaison). La Figure 7 donne des graphes jusqu'en 2019, alors que la Figure 8 les étend jusqu'en 2055 (ce qui permet d'inclure la crise du Covid).

Figures 7 : La fenêtre doit être plus petite que 24 quand $\lambda = \infty$

L'allure générale de la courbe de coefficient k ne dépend certes peu de la fenêtre, mais la position de la courbe par rapport à $k=1$ est importante pour la rapidité avec laquelle les surplus budgétaires exigés compenseront les déficits autorisés. De plus, l'ampleur des écarts par rapport à 1 et leur timing est aussi important. Une fenêtre plus étroite permet de symétriser plus rapidement l'output gap (ceci est encore plus nette si on regarde $window = 12$ en Annexe V), alors que le PIB trend et le PIB effectif se croisent moins souvent quand la fenêtre est plus large. Toutes les courbes de coefficient k présentent un minimum local en 2007 (reflétant une année faste où le PIB était notablement supérieur à son trend), mais pour ROLUFdd la position de ce minimum diffère considérablement selon la window (rappelons qu'une différence de 0.001 sur le coefficient k a un impact de 70 millions sur le budget). Cette différence est bien plus grande que par exemple pour $MHP(\infty)$. Un ROLUFdd de window 24 tend non seulement à conduire à de longue période de surplus et de déficits, mais l'ampleur de ces surplus et déficits peut devenir très important. Un ROLUFdd de window 24 ne semble pas approprié : la fenêtre doit être plus étroite. Pour $window = 15$, ROLUFdd et $MHP(\infty)$ donnent des courbes de coefficient k presque identiques. Pour $window=24$, les courbes de ROLUFdd et $MHP(\infty)$ sont généralement relativement proches, mais il peut y avoir des écarts substantiels (comme en 2007). Dans les deux cas toutefois, le PIB trend reste inférieur au PIB effectif durant la crise de 2009, ce qui plaide pour utiliser des windows plus étroites quand $\lambda = \infty$.

Figure 7 : Evolution temporelle selon ROLUFdd et MHP(∞) jusqu'en 2019, window 15 et 24

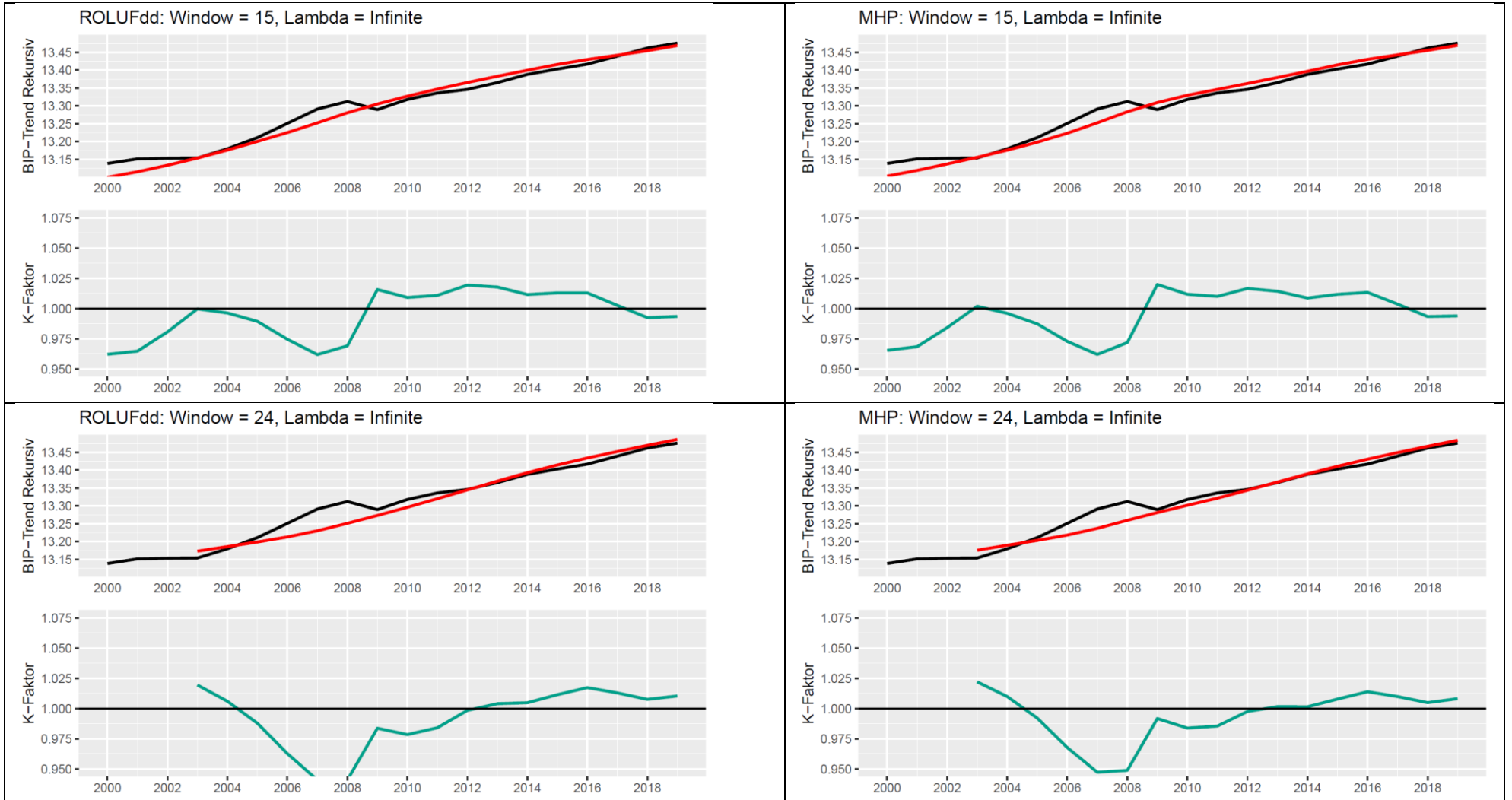


Figure 8 : Evolution temporelle selon ROLUFdd jusqu'en 2055

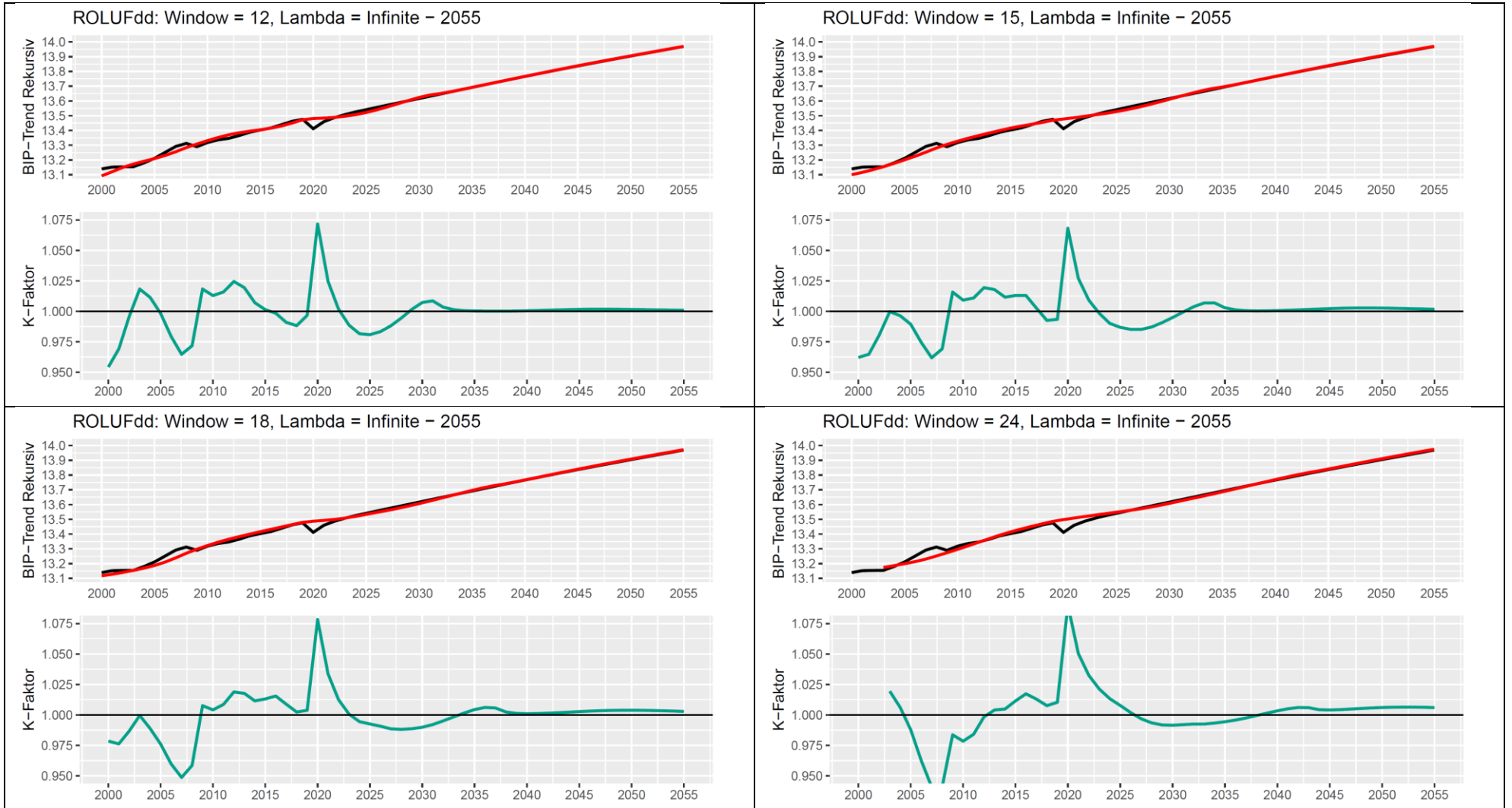


Figure 8 : pas de grand répit suite à une crise exceptionnelle

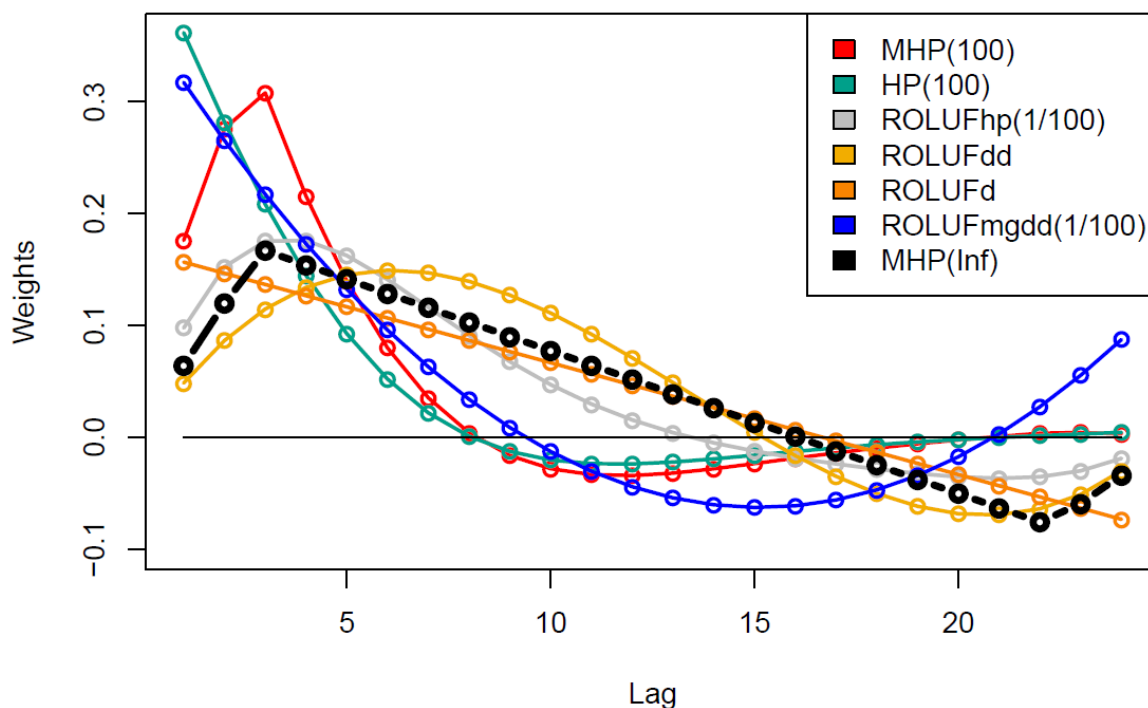
C'est 2020 et les années qui suivent qui sont particulièrement intéressantes sur la Figure 8. Le coefficient k en 2020 vaut approximativement 1.075 (sauf pour $window=24$ où il est plus élevé), ce qui autorise un déficit d'environ $75 \times 70 =$ millions CHF, soit un peu plus de 5 milliards. Plus la $window$ est grande, plus cela laisse de répit avant de devoir dégager des surplus. Mais ce répit n'est pas considérable, sauf pour $window = 24$.

La Figure 8 montre aussi un phénomène étrange : longtemps après le choc du Covid (vers 2030 ou 2035 : la date s'éloigne dans l'avenir quand la $window$ augmente), le PIB trend passe clairement en dessus du PIB effectif. Ceci autorise à nouveau des déficits à une date où le PIB effectif ne montre que peu de mouvement puisqu'il est extrapolé quasiment linéairement. Comme nous l'expliquerons ci-dessous, ceci provient du fait que la crise du Covid sort de la $window$.

Figure 9 : pondérations

Un filtre est complètement caractérisé par ses poids. Pour bien les comprendre, il est donc utile d'examiner ces poids. La Figure 9 les présente pour les principaux filtres discutés dans ce papier, ROLUFhp et ROLUFmgdd (la valeur mentionnée $\gamma = 1/100$ correspond à $\lambda = 100$), ROLUFdd et ROLUFd, MHP(100) et MHP(∞), HP(100). Tous ces filtres ont $window = 24$. Le poids est indiqué en fonction du lag : le poids d'un lag nul correspond au poids du PIB effectif de la date pour lequel le PIB trend est calculé, un lag de 1 donne le poids du PIB effectif de l'année précédente, etc.

Figure 9 : Pondérations de différents filtres



HP(100) et MHP(100) ont la propriété que le poids tend vers zéro quand le lag tend vers 24. Quand un PIB effectif particulier (par exemple une grande crise ou un grand boom) sort de la $window$ parce qu'il devient trop éloigné dans le passé, cela n'a pas d'impact sur le calcul du

PIB trend. Tel n'est pas le cas avec les ROLUF, ni avec $MHP(\infty)$: même avec un lag de 24, le poids est clairement différent de zéro. Ceci est particulièrement visible pour ROLUFmgdd et ROLUFd. C'est aussi l'explication du phénomène étrange que nous avons observé sur la Figure 8. ROLUFdd accorde un poids négatif au PIB le plus ancien dans sa window. Si l'on compare une série avec et sans Covid, le PIB effectif de 2020 sera plus faible dans la série avec Covid, ce qui augmente le PIB trend calculé en 2020+window par rapport au scénario sans Covid. Comme ce PIB trend est suffisamment élevé, il dépasse le PIB effectif, ce qui donne l'impression que la conjoncture est mauvaise et autorise des déficits.

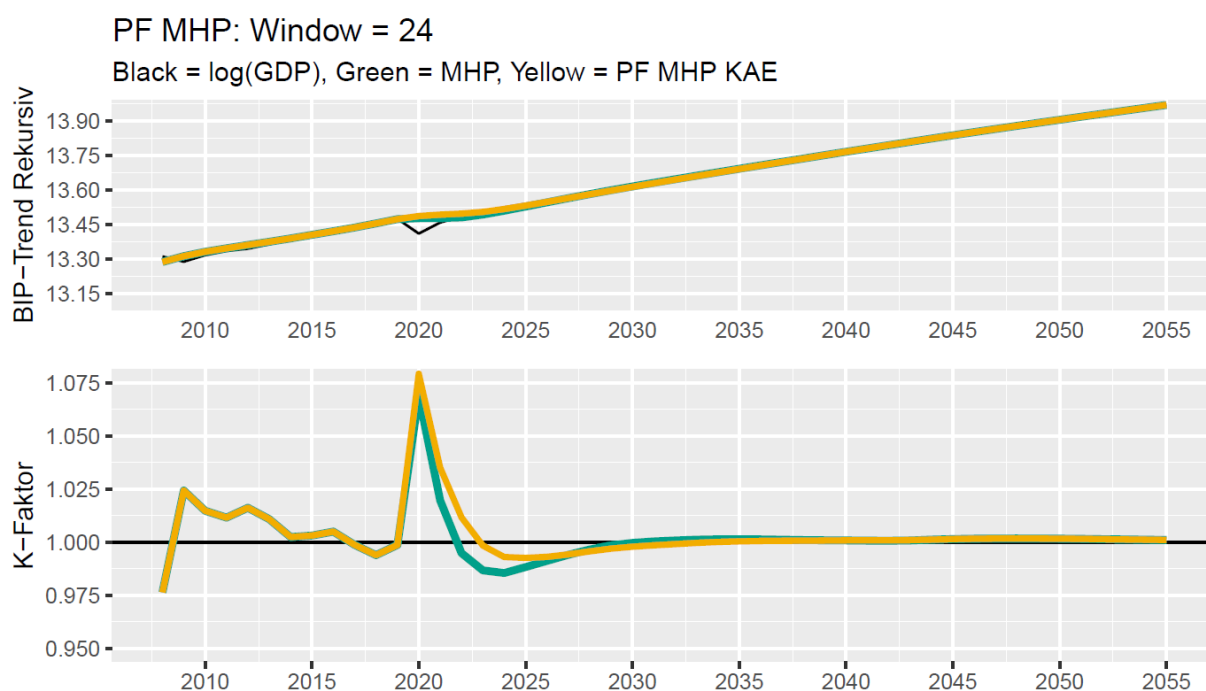
A l'autre extrême (lag=0), certains filtres donnent un poids plus élevé à l'année précédente qu'à l'année courante : MHP ($\lambda = 100$ et ∞), $ROLUFHP$ ($\gamma = 1/100$) et ROLUFdd.

L'examen des poids est une bonne façon d'évaluer la ressemblance de différents filtres. Les poids de $MHP(\infty)$ sont relativement proches de ceux de ROLUFdd et $ROLUFHP$ ($\gamma = 1/100$).

4.5 Intégration du Kurzarbeit

Dans Schmassmann et al. (2020), nous avons introduit le Kurzarbeit dans MHP (100). Pour des précisions, voir l'annexe III de Schmassmann et al. (2020).

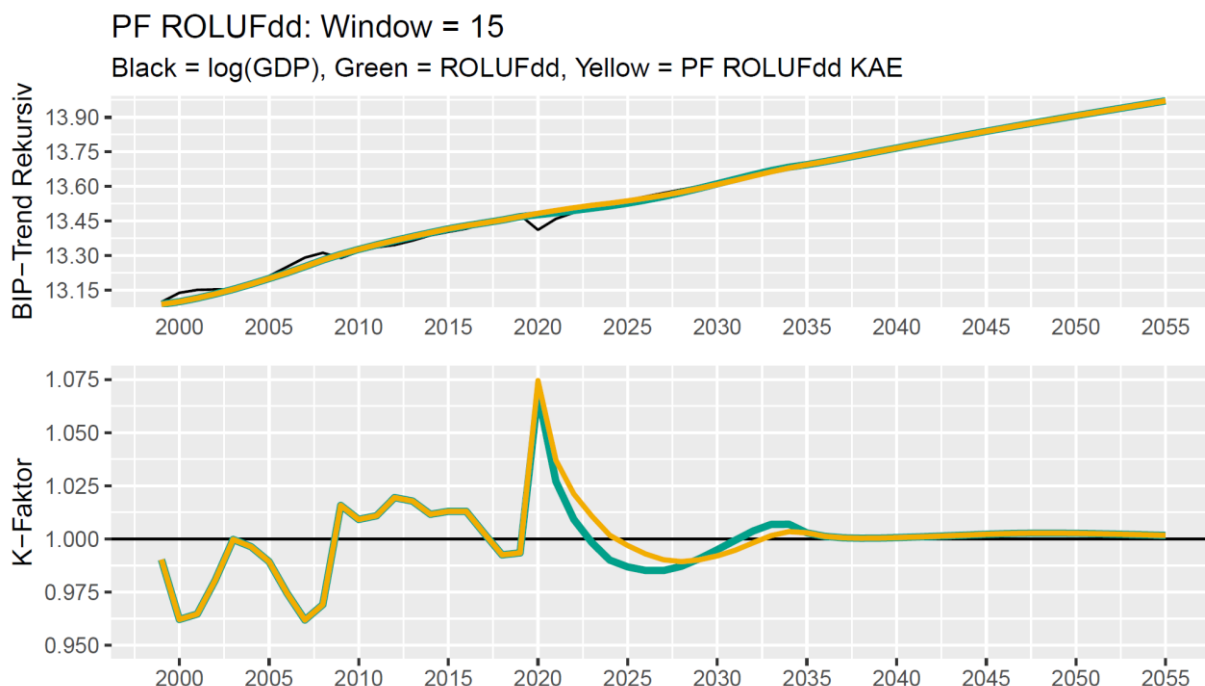
Figure 10 : Kurzarbeit intégré dans $MHP(100)$



L'intégration du Kurzarbeit permet de prendre en compte un aspect du marché du travail particulièrement important durant une grave crise. Cela conduit à donner davantage de répit après le choc du Covid avant de devoir dégager des surplus. Ces surplus sont aussi plus faibles. Cela a toutefois aussi pour conséquence que les déficits autorisés ne seront pas entièrement compensés par des surplus.

Nous pouvons introduire le Kurzarbeit par la même procédure dans n'importe quel filtre univarié linéaire. Pour ROLUFdd avec window 15, cela donne le graph suivant.

Figure 11 : Kurzarbeit intégré dans ROLUFdd avec window=15



Par rapport à MHP, le répit est légèrement plus long (il est déjà légèrement plus long sans prise en compte du Kurzarbeit). Mais le phénomène étrange que nous avons noté sur la Figure 8 persiste, quoique dans une moindre mesure, lorsque le Kurzarbeit est pris en compte.

4.6 Conclusion

En nous basant sur les données de PIB effectif 2004-2019, nous trouvons que ROLUFhp permettait d'obtenir un PIB trend plus lisse que selon toutes les alternatives que nous avons étudiées, sans devoir le payer par un large output gap moyen si nous choisissons une bonne paramétrisation (Schmassmann et al., 2020). Nous avons conclu que $ROLUFhp(\lambda = \infty ; window = 15)$, c'est-à-dire $ROLUFdd(window = 15)$, était le plus prometteur des ROLUFhp. Mais nous avons aussi souligné qu'il fallait étudier la robustesse de ses propriétés.

Dans le présent papier, nous avons considéré d'autres filtres linéaires univariés récursivement optimaux qui minimisent d'autres fonction de coûts (et dans le cas de ROLUFmgdd sur un coude plutôt qu'une marche d'escalier). Nous trouvons toutefois que ROLUFdd reste le meilleur des ROLUF. Fait exception le cas où on considère simultanément que i) la volatilité du PIB trend doit être mesurée par l'écart-type des différences annuelles (*diff*) plutôt que par la somme des carrés des coudes (*diff* de *diff*) et ii) un output gap annuels moyens de l'ordre 4 milliards de CHF ne pose pas problème. Dans ce cas, il existe d'autres options qui sont préférables : $ROLUFmgdd(\lambda = \infty ; window = 24)$ et $ROLUFd(\lambda = \infty ; window = 24)$. A cette exception près, la comparaison entre les ROLUF est plutôt favorable à ROLUFdd.

Nous avons étudié la robustesse concernant la volatilité du PIB trend et l'ampleur de l'output gap moyen en considérant i) des sous-séries de la série historique de PIB effectif 2004-2019 et des sous-séries d'une extension à 2025 et ii) 500 séries de données artificielles générées selon un processus calibré sur la réalité. Nous n'avons pas pu tirer de conclusion véritablement robustes de ces analyses. Lorsque l'on extrait différentes sous-séries de même taille, la meilleure spécification de ROLUFdd n'est pas toujours la même. Il est donc difficile de choisir une meilleure méthode robuste. L'analyse sur les données artificielles montre que le trend plus lisse du trend selon ROLUFdd se fait au prix d'un output gap moyen plus éloigné de zéro. Plus précisément : l'espérance de l'output gap moyen est certes proche de zéro, mais sa variance devient plus élevée, de sorte que l'output gap moyen calculé sur une série donnée sera

vraisemblablement plus éloigné de zéro que selon MHP (100). Si le processus générateur que nous avons utilisé pour générer ces données artificielles est correct, cela signifie que la bonne performance de ROLUFdd($window = 15$) relativement à MHP (100) à la fois concernant la volatilité du PIB trend et la faiblesse de l'output gap relevait de la chance. Ceci illustre qu'il est dangereux de généraliser des conclusions sur les propriétés d'une méthode en se basant sur une unique série.

L'output gap moyen et les indicateurs de volatilité du PIB trend sont des valeurs moyennes. Pour évaluer la qualité du timing de l'évolution du PIB trend, il faut étudier son évolution temporelle. Il apparaît qu'un λ élevé devrait être conjugué à une window relativement étroite pour compenser la rigidité qu'implique ce λ . Sinon, le PIB trend aura tendance à rester longtemps en-dessous ou en-dessus du PIB effectif. Même si les output gaps finissent par s'annuler, cela peut prendre du temps. De plus, l'output gap risque de devenir important, impliquant d'autoriser de grands déficits ou d'exiger de grands surplus budgétaires. Notons que la coexistence d'une large fenêtre et d'un λ était nécessaire (mais pas suffisant) pour constituer une exception où ROLUFdd n'est pas le meilleur ROLUF. Dans la mesure où cette condition n'est pas retenue, cela réduit la pertinence de l'exception et renforce la conclusion que ROLUFdd est le meilleur ROLUF. Par ailleurs, nous trouvons que pour des windows pas trop grandes ($window=15$ par exemple), ROLUFdd et MHP(∞) donnent des courbes de coefficient k très proches. Ceci confirme la proximité trouvée sur les données artificielles. L'analyse sur des données de PIB effectif étendues jusqu'en 2055 montrent qu'augmenter la taille de la window augmente le répit après le choc du Covid avant de devoir dégager des surplus. Mais ce répit est faible comparé à ce qu'apporte la prise en compte du Kurzarbeit (au prix toutefois de déficits qui ne seront pas compensés)

Comme un filtre linéaire donne un trend qui est une somme pondérée de PIB effectifs présent et passés, il est utile d'examiner ces poids pour comparer différents filtres. Il apparaît que MHP(∞) est quantitativement relativement proche de ROLUFdd et ROLUFHP ($\lambda = 100$). Qualitativement, MHP et ROLUFhp partagent la propriété d'avoir un poids pour le PIB effectif de l'année précédente plus élevé que pour l'année courante. MHP (100) et HP (100) ont en commun une propriété partagée ni par MHP(∞), ni par les différents ROLUF : les PIB effectifs les plus éloignés dans le temps (vers le début de la window) ont un poids négligeable. Cette propriété est utile, car elle implique que quand une année particulièrement bonne ou mauvaise sort de la window, cela n'a pas d'impact sur le PIB trend. Pour une window de 24 ans, il n'est pas facile d'expliquer qu'un mouvement actuel du PIB trend est dû au fait qu'une année extraordinaire datant de 24 ans est sortie de la window. Ceci ne doit pas conduire à rejeter une méthode parce que le poids du premier PIB de sa window n'est pas négligeable, mais peut justifier d'éliminer des méthodes dont cette pondération est particulièrement élevée.

Globalement, les propriétés qui avaient rendu ROLUFdd (et plus spécifiquement sa paramétrisation par $window=15$) particulièrement prometteur ne se sont pas avérées très robustes. Mais aucune conclusion robuste n'a pu être tirée, de sorte que si la présente étude ne confirme pas l'intérêt de ce filtre, elle n'apporte pas non plus de raisons de penser qu'un autre filtre serait meilleur. L'évolution temporelle du PIB trend confirme plutôt qu'il est juste d'utiliser une fenêtre relativement étroite quand $\lambda = \infty$. Par ailleurs, dans le cas d'une crise exceptionnelle telle que Covid-19, la faible volatilité du PIB trend ne suffit pas pour augmenter significativement le répit avant de devoir dégager des surplus budgétaires. La prise en compte du Kurzarbeit par contre le permet.

5 Conclusion

Nous avons calculé quatre filtres récursivement optimaux sur une série en forme de marche d'escalier (ROLUFhp, ROLUFdd et ROLUFd) ou en forme de coude (ROLUFmgdd). Elles diffèrent par la fonction de coût qu'elle minimise : la fonction de coût d'HP pour ROLUFhp (uniquement la composante exigeant un trend lisse pour ROLUFdd), une mesure alternative de la volatilité du trend pour ROLUFd (écart-type des différences). ROLUFmgdd minimise une fonction de coût identique à celle de HP, sauf que l'exigence que le trend soit proche de la série sous-jacente a été remplacée par l'exigence que les écarts entre le trend et la série sous-jacente tendent à s'annuler. Nous avons fourni les formules pour calculer ces filtres (§3), ainsi que leurs démonstrations (Annexes I à III).

Nous avons appliqué ces filtres pour calculer le PIB trend dans le cadre du frein à l'endettement. Consultez §4.6 pour un résumé des conclusions. ROLUFdd est dans la plupart des cas le meilleur ROLUF. La paramétrisation optimale de ROLUFdd n'est toutefois pas robuste. Ceci illustre probablement un point plus général : il est dangereux de conclure sur les propriétés d'une méthode en se basant sur une unique série. Si le présent papier n'a pas pu confirmer la robustesse du candidat qui nous avait apparu le plus prometteur, il ne met pas non plus en évidence une méthode qui lui serait robustement supérieur. En ce sens, ROLUFdd($window = 15$) reste un candidat intéressant.

Le fait que la nette supériorité de ROLUFdd($window = 15$) ne soit pas robuste implique que nous devons étudier plus précisément les spécifications des alternatives. En particulier, la question se pose de savoir quelle est la meilleure paramétrisation du filtre MHP actuellement utilisé. La présente étude suggère qu'un MHP(∞) avec $window = 15$ serait relativement proche de ROLUFdd($window = 15$).

Annexe I : Démonstration de la formule de ROLUFhp

Nous cherchons le filtre univarié linéaire (et tel que le trend d'une droite est cette droite) qui donne un trend τ_t minimisant récursivement la fonction de coût suivante (fonction de coût de HP) sur une marche d'escalier :

$$\min_{\tau} \left\{ \sum_{t=-\infty}^{\infty} (x_t - \tau_t)^2 + \lambda \sum_{t=-\infty}^{\infty} [(\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1})]^2 \right\}$$

ROLUFhp(λ, N) signifie Recursively Optimal Linear Univariate Filter qui minimise la fonction de coût de HP avec smoothing parameter λ . Le filtre s'applique récursivement sur une fenêtre allant de $t - N$ à t (comprenant donc $N + 1$ points)

I.1 : Reformulation du problème d'optimisation

La formule pour le trend d'une marche d'escalier est donnée au §2.1 par :

$$\tau_t = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 0 \\ 1 - \sum_{k=N-t}^N \theta_k = \sum_{k=0}^{N-t-1} \theta_k & \text{si } 0 \leq t \leq N \\ 0 & \text{si } t \geq N \end{cases}$$

Le carré du gap au temps t entre la série sous-jacente et son trend est alors $(x_t - \tau_t)^2 = [0 - \sum_{k=0}^{N-t-1} \theta_k]^2 = (\sum_{k=0}^{N-t-1} \theta_k)^2$. La somme des carrés des output gaps est donc :

$$\sum_{t=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-t-1} \theta_k \right)^2$$

En ce qui concerne la croissance du trend, notons que pour $0 \leq t \leq N$

$$\tau_t - \tau_{t-1} = -\sum_{j=N-t}^N \theta_j + \sum_{j=N-(t-1)}^N \theta_j = -\theta_{N-t}$$

Donc pour $0 \leq t \leq N - 1$:

$$[(\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1})]^2 = [\theta_{N-t} - \theta_{N-t-1}]^2$$

La somme sur $0 \leq t \leq N - 1$ est:

$$\sum_{t=0}^{N-1} (\theta_{N-t} - \theta_{N-t-1})^2 = \sum_{j=1}^N (\theta_j - \theta_{j-1})^2$$

Les deux extrêmes $t=-1$ et $t=N$ impliquent par contre des termes faisant intervenir la croissance nulle du trend avant le choc ou après que le trend aie rejoint la série sur laquelle le filtre est appliqué : $[(\tau_{-1+1} - \tau_{-1}) - (\tau_{-1} - \tau_{-1-1})]^2 = [\theta_{N-0} - 0]^2 = \theta_N^2$
et $[(\tau_{N+1} - \tau_N) - (\tau_N - \tau_{N-1})]^2 = [0 - \theta_{N-N}]^2 = \theta_0^2$

La fonction de coût à minimiser est donc :

$$\{ \theta_j \}_{j=0}^N \left[\theta_N^2 + \theta_0^2 + \sum_{j=1}^N (\theta_j - \theta_{j-1})^2 + \gamma \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-j-1} \theta_k \right)^2 \right]$$

$\theta_N^2 + \theta_0^2 + \sum_{j=1}^N (\theta_j - \theta_{j-1})^2$ est la composante de la fonction de coût reflétant la volatilité du trend.

$\sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-j-1} \theta_k \right)^2$ est la composante concernant l'écart entre le trend et la série sur laquelle le filtre est appliqué. $\gamma = \frac{1}{\lambda}$.

Il s'agit donc de résoudre le problème suivant :

$$\begin{aligned} & \{ \theta_j \}_{j=0}^N \left[\theta_N^2 + \theta_0^2 + \sum_{j=1}^N (\theta_j - \theta_{j-1})^2 + \gamma \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-j-1} \theta_k \right)^2 \right] \\ & \text{st:} \\ & \sum_{j=0}^N \theta_j = 1 \\ & \sum_{j=0}^N [j * \theta_j] = N \end{aligned}$$

I.2 : Polynôme caractéristique

Le Lagrangien est

$$L = \theta_N^2 + \theta_0^2 + \sum_{j=1}^N (\theta_j - \theta_{j-1})^2 + \gamma \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-j-1} \theta_k \right)^2 + 2\Omega_1 \left(\sum_{j=0}^N \theta_j - 1 \right) + 2\Omega_2 \left(\sum_{j=0}^N [j * \theta_j] - N \right)$$

$$0 = \frac{dL}{d\theta_0} = 2\theta_0 - 2(\theta_1 - \theta_0) + 2\gamma \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-j-1} \theta_k \right) + 2\Omega_1$$

$$0 = \frac{dL}{d\theta_N} = 2\theta_N + 2(\theta_N - \theta_{N-1}) + 2\Omega_1 + 2\Omega_2 N$$

$$0 = \frac{dL}{d\theta_{k \in \{0; N\}}} = 2(\theta_k - \theta_{k-1}) - 2(\theta_{k+1} - \theta_k) + 2\gamma \sum_{j=0}^{N-1-k} \left(\sum_{l=0}^{N-j-1} \theta_l \right) + 2\Omega_1 + 2\Omega_2 k$$

En définissant $\theta_{-1} = 0$ et $\theta_{N+1} = \theta_N$ (il s'agit de θ n'intervenant pas dans la définition du filtre, mais ainsi défini de sorte à obtenir une formule valable sur tout $k \in \{0; N\}$), on obtient :

$$(\theta_{k+1} - \theta_k) - (\theta_k - \theta_{k-1}) = \gamma \sum_{j=0}^{N-1-k} \left(\sum_{l=0}^{N-j-1} \theta_l \right) + \Omega_1 + \Omega_2 k$$

(pour $k = N$, il y a une somme $\sum_{j=0}^{-1} (\sum_{l=0}^{N-j-1} \theta_l)$ qui doit être interprété comme disant qu'aucun terme n'est sommé et que cette expression est donc zéro).

On observe que la troisième différence est :

$$\begin{aligned} & [(\theta_{k+2} - \theta_{k+1}) - (\theta_{k+1} - \theta_k)] - [(\theta_{k+1} - \theta_k) - (\theta_k - \theta_{k-1})] \\ &= \gamma \sum_{j=0}^{N-1-(k+1)} \left(\sum_{l=0}^{N-j-1} \theta_l \right) + \Omega_1 + \Omega_2(k+1) - \gamma \sum_{j=0}^{N-1-k} \left(\sum_{l=0}^{N-j-1} \theta_l \right) - \Omega_1 - \Omega_2 k \end{aligned}$$

Et donc

$$[(\theta_{k+2} - \theta_{k+1}) - (\theta_{k+1} - \theta_k)] - [(\theta_{k+1} - \theta_k) - (\theta_k - \theta_{k-1})] = \Omega_2 - \gamma \sum_{l=0}^k \theta_l$$

La quatrième différence est donc :

$$\begin{aligned} & \{[(\theta_{k+3} - \theta_{k+2}) - (\theta_{k+2} - \theta_{k+1})] - [(\theta_{k+2} - \theta_{k+1}) - (\theta_{k+1} - \theta_k)]\} \\ & - \{[(\theta_{k+2} - \theta_{k+1}) - (\theta_{k+1} - \theta_k)] - [(\theta_{k+1} - \theta_k) - (\theta_k - \theta_{k-1})]\} \\ &= \Omega_2 - \gamma \sum_{l=0}^{k+1} \theta_l - \Omega_2 + \gamma \sum_{l=0}^k \theta_l = -\gamma \theta_{k+1} \end{aligned}$$

(notons que cette quatrième différence est nulle si $\gamma = 0$).

Que l'on peut réécrire ainsi :

$$\theta_{k+3} - 4\theta_{k+2} + (6 + \gamma)\theta_{k+1} - 4\theta_k + \theta_{k-1} = 0$$

ou

$$\theta_{k+3} = -\theta_{k-1} + 4\theta_k - (6 + \gamma)\theta_{k+1} + 4\theta_{k+2}$$

Cherchons une solution du type $\theta_j = r^j$.

Nous obtenons le polynôme caractéristique suivant :

$$r^{k+3} = -r^{k-1} + 4r^k - (6 + \gamma)r^{k+1} + 4r^{k+2}$$

Qui se simplifie en :

$$1 - 4r + (6 + \gamma)r^2 - 4r^3 + r^4 = 0$$

$$\text{or } 1 - 4r + 6r^2 - 4r^3 + r^4 = (r - 1)^4$$

L'équation devient donc

$$(r - 1)^4 + \gamma r^2 = 0$$

Qui n'a pas de solution réelle pour $\gamma \neq 0$. Pour $\gamma = 0$, la solution (multiple) est $r = 1$.

On sait que si r est une solution, alors son complexe conjugué \bar{r} est aussi solution pour un polynôme caractéristique à coefficients réels.⁴ Dans le cas de ce polynôme, l'inverse d'une racine est aussi une racine.⁵ A partir d'une racine, on obtient donc les trois autres en prenant le complexe conjugué et/ou l'inverse.

I.3 : Solution pour $\gamma = 0$

Pour $\gamma = 0$, $r = 1$ est la seule racine du polynôme caractéristique (c'est une racine multiple d'ordre 4). Dans ce cas, la solution de l'équation de récurrence est :

$$\theta_k = \alpha_0 + \alpha_1 k + \alpha_2 k^2 + \alpha_3 k^3$$

(Ce que l'on pouvait deviner dès que l'on avait constaté que la quatrième différence est nulle.)

Cherchons les α qui résolvent le problème d'optimisation sous contrainte.

$$\underset{\{\theta_j\}_{j=0}^N}{MIN} \left[\theta_N^2 + \theta_0^2 + \sum_{j=1}^N (\theta_j - \theta_{j-1})^2 \right]$$

st:

$$\sum_{j=0}^N \theta_j = 1$$

$$\sum_{j=0}^N [j * \theta_j] = N$$

Récrivons le Lagrangien avec $\gamma = 0$:

$$L = \theta_N^2 + \theta_0^2 + \sum_{k=1}^N (\theta_k - \theta_{k-1})^2 + 2\Omega_1 \left(\sum_{k=0}^N \theta_k - 1 \right) + 2\Omega_2 \left(\sum_{k=0}^N [k * \theta_k] - N \right)$$

où $\theta_k = \alpha_0 + \alpha_1 k + \alpha_2 k^2 + \alpha_3 k^3$ et donc $\frac{d\theta_k}{d\alpha_i} = k^i$ (pour $k = 0$ et $i = 0$, cela correspond à $\frac{d\theta_0}{d\alpha_0} = 1$)

On a quatre équations du type $0 = \frac{dL}{d\alpha_i}$ comme first order condition et les deux contraintes. Donc 6 équations et 6 inconnues (les α et Ω).

$$0 = \frac{dL}{d\alpha_i} = 2\theta_N N^i + 2\theta_0 (1 \text{ si } i \text{ égal } 0, 0 \text{ sinon}) + 2 \sum_{k=1}^N [(\theta_k - \theta_{k-1})(k^i - (k-1)^i)] + 2\Omega_1 \sum_{k=0}^N k^i + 2\Omega_2 \sum_{k=0}^N k^{i+1}$$

⁴ $(r-1)^4 + \gamma r^2 = 0 \Rightarrow \overline{(r-1)^4 + \gamma r^2} = \bar{0} \Rightarrow \overline{(r-1)^4} + \overline{\gamma r^2} = 0 \Rightarrow (\bar{r}-1)^4 + \gamma \bar{r}^2 = 0$

⁵ $(r-1)^4 + \gamma r^2 = 0 \Rightarrow \frac{(r-1)^4 + \gamma r^2}{r^4} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{r} - 1\right)^4 + \gamma \frac{1}{r^2} = 0$

Remplaçons les θ_k par $\alpha_0 + \alpha_1 k + \alpha_2 k^2 + \alpha_3 k^3$

$$0 = (\alpha_0 + \alpha_1 N + \alpha_2 N^2 + \alpha_3 N^3)N^i + \alpha_0 * (1 \text{ si } i \text{ égal } 0, 0 \text{ sinon}) \\ + \sum_{k=1}^N [(\alpha_1 + \alpha_2(k^2 - (k-1)^2) + \alpha_3(k^3 - (k-1)^3))(k^i - (k-1)^i)] + \Omega_1 \sum_{k=0}^N k^i \\ + \Omega_2 \sum_{k=0}^N k^{i+1}$$

Distribuons la somme où se trouvent les α :

$$0 = (\alpha_0 + \alpha_1 N + \alpha_2 N^2 + \alpha_3 N^3)N^i + \alpha_0 * (1 \text{ si } i \text{ est } 0, 0 \text{ sinon}) + \alpha_1 \sum_{k=1}^N (k^i - (k-1)^i) \\ + \alpha_2 \sum_{k=1}^N [(k^2 - (k-1)^2)(k^i - (k-1)^i)] + \alpha_3 \sum_{k=1}^N [(k^3 - (k-1)^3)(k^i - (k-1)^i)] + \Omega_1 \sum_{k=0}^N k^i \\ + \Omega_2 \sum_{k=0}^N k^{i+1}$$

Que l'on peut réécrire :

$$0 = (\alpha_0 + \alpha_1 N + \alpha_2 N^2 + \alpha_3 N^3)N^i + \alpha_0 * (1 \text{ si } i \text{ est } 0, 0 \text{ sinon}) + \alpha_1 \sum_{k=1}^N (k^i - (k-1)^i) \\ + \alpha_2 \sum_{k=1}^N [(2k-1)(k^i - (k-1)^i)] + \alpha_3 \sum_{k=1}^N [(3k^2 - 3k + 1)(k^i - (k-1)^i)] + \Omega_1 \sum_{k=0}^N k^i \\ + \Omega_2 \sum_{k=0}^N k^{i+1}$$

Examinons ce que donne cette équation pour les 4 valeurs de i .

$i = 0$

$$0 = (\alpha_0 + \alpha_1 N + \alpha_2 N^2 + \alpha_3 N^3) + \alpha_0 + \Omega_1(N+1) + \Omega_2 N(N+1)/2$$

$i = 1$

$$0 = (\alpha_0 + \alpha_1 N + \alpha_2 N^2 + \alpha_3 N^3)N + \alpha_1 N + \alpha_2 \sum_{k=1}^N (2k-1) + \alpha_3 \sum_{k=1}^N (3k^2 - 3k + 1) + \Omega_1 \sum_{k=0}^N k \\ + \Omega_2 \sum_{k=0}^N k^2$$

$$0 = (\alpha_0 + \alpha_1 N + \alpha_2 N^2 + \alpha_3 N^3)N + \alpha_1 N + \alpha_2(N(N+1) - N) \\ + \alpha_3 \sum_{k=1}^N [\frac{1}{2}N(N+1)(2N+1) - \frac{3N(N+1)}{2} + N] + \Omega_1 \frac{N(N+1)}{2} \\ + \Omega_2 \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)$$

$$0 = (\alpha_0 + \alpha_1 N + \alpha_2 N^2 + \alpha_3 N^3)N + \alpha_1 N + \alpha_2 N^2 + \alpha_3 N^3 + \Omega_1 \frac{N(N+1)}{2} + \Omega_2 \frac{1}{6} N(N+1)(2N+1)$$

$i = 2$

$$0 = (\alpha_0 + \alpha_1 N + \alpha_2 N^2 + \alpha_3 N^3)N^2 + \alpha_1 \sum_{k=1}^N (k^2 - (k-1)^2) + \alpha_2 \sum_{k=1}^N [(2k-1)(k^2 - (k-1)^2)] + \alpha_3 \sum_{k=1}^N [(3k^2 - 3k + 1)(k^2 - (k-1)^2)] + \Omega_1 \sum_{k=0}^N k^2 + \Omega_2 \sum_{k=0}^N k^3$$

$$0 = (\alpha_0 + \alpha_1 N + \alpha_2 N^2 + \alpha_3 N^3)N^2 + \alpha_1 \sum_{k=1}^N (2k-1) + \alpha_2 \sum_{k=1}^N [(2k-1)(2k-1)] + \alpha_3 \sum_{k=1}^N [(3k^2 - 3k + 1)(2k-1)] + \Omega_1 \sum_{k=0}^N k^2 + \Omega_2 \sum_{k=0}^N k^3$$

$$0 = (\alpha_0 + \alpha_1 N + \alpha_2 N^2 + \alpha_3 N^3)N^2 + \alpha_1 (N(N+1) - N) + \alpha_2 \sum_{k=1}^N [4k^2 - 4k + 1] + \alpha_3 \sum_{k=1}^N [6k^3 - 9k^2 + 5k - 1] + \Omega_1 \frac{1}{6} N(N+1)(2N+1) + \Omega_2 \frac{1}{4} N^2(N+1)^2$$

$$0 = (\alpha_0 + \alpha_1 N + \alpha_2 N^2 + \alpha_3 N^3)N^2 + \alpha_1 N^2 + \alpha_2 [4 \frac{1}{6} N(N+1)(2N+1) - 2N(N+1) + N] + \alpha_3 [\frac{6}{4} N^2(N+1)^2 - \frac{9}{6} N(N+1)(2N+1) + \frac{5N(N+1)}{2} - N] + \Omega_1 \frac{1}{6} N(N+1)(2N+1) + \Omega_2 \frac{1}{4} N^2(N+1)^2$$

$$0 = (\alpha_0 + \alpha_1 N + \alpha_2 N^2 + \alpha_3 N^3)N^2 + \alpha_1 N^2 + \alpha_2 N \frac{(2N-1)(2N+1)}{3} + \alpha_3 [N^2 \frac{3N^2-1}{2}] + \Omega_1 \frac{1}{6} N(N+1)(2N+1) + \Omega_2 \frac{1}{4} N^2(N+1)^2$$

$i = 3$

$$0 = (\alpha_0 + \alpha_1 N + \alpha_2 N^2 + \alpha_3 N^3)N^3 + \alpha_1 \sum_{k=1}^N (k^3 - (k-1)^3) + \alpha_2 \sum_{k=1}^N [(2k-1)(k^3 - (k-1)^3)] + \alpha_3 \sum_{k=1}^N [(3k^2 - 3k + 1)(k^3 - (k-1)^3)] + \Omega_1 \sum_{k=0}^N k^3 + \Omega_2 \sum_{k=0}^N [k^4]$$

$$\begin{aligned}
0 &= (\alpha_0 + \alpha_1 N + \alpha_2 N^2 + \alpha_3 N^3) N^3 \\
&\quad + \alpha_1 \sum_{k=1}^N (3k^2 - 3k + 1) + \alpha_2 \sum_{k=1}^N [(2k-1)(3k^2 - 3k + 1)] \\
&\quad + \alpha_3 \sum_{k=1}^N [(3k^2 - 3k + 1)(3k^2 - 3k + 1)] + \Omega_1 \frac{1}{4} N^2 (N+1)^2 + \Omega_2 \frac{1}{30} N(N+1)(2N \\
&\quad + 1)(3N^2 + 3N - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= (\alpha_0 + \alpha_1 N + \alpha_2 N^2 + \alpha_3 N^3) N^3 + \alpha_1 \left(3 \frac{1}{6} N(N+1)(2N+1) - \frac{3N(N+1)}{2} + N \right) \\
&\quad + \alpha_2 \sum_{k=1}^N [6k^3 - 9k^2 + 5k - 1] + \alpha_3 \sum_{k=1}^N [9k^4 - 18k^3 + 15k^2 - 6k + 1] \\
&\quad + \Omega_1 \frac{1}{4} N^2 (N+1)^2 + \Omega_2 \frac{1}{30} N(N+1)(2N+1)(3N^2 + 3N - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= (\alpha_0 + \alpha_1 N + \alpha_2 N^2 + \alpha_3 N^3) N^3 + \alpha_1 \left(3 \frac{1}{6} N(N+1)(2N+1) - \frac{3N(N+1)}{2} + N \right) \\
&\quad + \alpha_2 \left[\frac{6}{4} N^2 (N+1)^2 - \frac{9}{6} N(N+1)(2N+1) + \frac{5}{2} N(N+1) - N \right] + \alpha_3 \left[\frac{9}{30} N(N \right. \\
&\quad + 1)(2N+1)(3N^2 + 3N - 1) - \frac{18}{4} N^2 (N+1)^2 + \frac{15}{6} N(N+1)(2N+1) \\
&\quad \left. - \frac{6}{2} N(N+1) + N \right] + \Omega_1 \frac{1}{4} N^2 (N+1)^2 + \Omega_2 \frac{1}{30} N(N+1)(2N+1)(3N^2 + 3N - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= (\alpha_0 + \alpha_1 N + \alpha_2 N^2 + \alpha_3 N^3) N^3 + \alpha_1 N^3 + \alpha_2 \left[N^2 \frac{3N^2 - 1}{2} \right] + \alpha_3 \left[\frac{9}{5} N^5 - N^3 + \frac{1}{5} N \right] \\
&\quad + \Omega_1 \frac{1}{4} N^2 (N+1)^2 + \Omega_2 \frac{1}{30} N(N+1)(2N+1)(3N^2 + 3N - 1)
\end{aligned}$$

Le système d'équation peut s'écrire sous forme matricielle (en incluant les deux contraintes)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ N \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix}$$

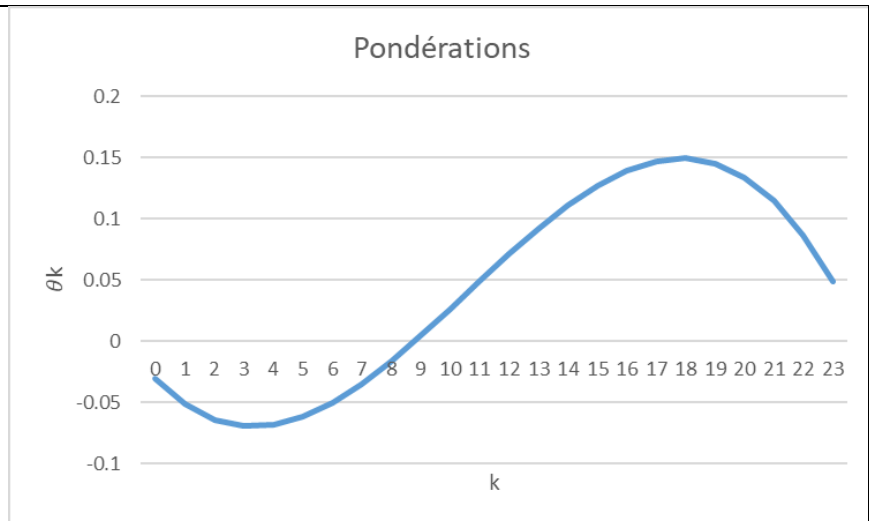
$$A = \begin{bmatrix} 2 & N & N^2 & N^3 & N+1 & \frac{N(N+1)}{2} \\ N & N(N+1) & N^2(N+1) & N^3(N+1) & \frac{N(N+1)}{2} & \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) \\ N^2 & N^2(N+1) & N \left[N^3 + \frac{(2N-1)(2N+1)}{3} \right] & N^2 \left(N^3 + \frac{3N^2-1}{2} \right) & \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) & \frac{1}{4}N^2(N+1)^2 \\ N^3 & N^3(N+1) & N^2 \left(N^3 + \frac{3N^2-1}{2} \right) & N \left[N^5 + \frac{9}{5}N^4 - N^2 + \frac{1}{5} \right] & \frac{1}{4}N^2(N+1)^2 & \frac{1}{30}N(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1) \\ N+1 & \frac{N(N+1)}{2} & \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) & \frac{1}{4}N^2(N+1)^2 & 0 & 0 \\ \frac{N(N+1)}{2} & \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) & \frac{1}{4}N^2(N+1)^2 & \frac{1}{30}N(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette matrice 6x6 est symétrique et donc inversible. Donc :

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ N \end{bmatrix}$$

Pondérations pour N=23

k	θ_k
0	-0.03008547
1	-0.051111111
2	-0.063931624
3	-0.069401709
4	-0.068376068
5	-0.061709402
6	-0.05025641
7	-0.034871795
8	-0.016410256
9	0.004273504
10	0.026324786
11	0.048888889
12	0.071111111
13	0.092136752
14	0.111111111
15	0.127179487
16	0.139487179
17	0.147179487
18	0.149401709
19	0.145299145
20	0.134017094
21	0.114700855
22	0.086495726
23	0.048547009



I.4 : Solution pour $\gamma \neq 0$

Nous avons trouvé ci-dessus le polynôme caractéristique suivant :

$$(r - 1)^4 + \gamma r^2 = 0$$

Pour $\gamma \neq 0$, les racines sont complexes (un couple de complexes conjugués et leur inverse) :

$$r = \begin{cases} \frac{2 + i\sqrt{\gamma} \pm \sqrt{(2 + i\sqrt{\gamma})^2 - 4}}{2} \\ \frac{2 - i\sqrt{\gamma} \pm \sqrt{(2 - i\sqrt{\gamma})^2 - 4}}{2} \end{cases}$$

Le poids optimal θ est alors du type :

$$\theta_k = \alpha_0 r_0^k + \alpha_1 r_1^k + \alpha_2 r_2^k + \alpha_3 r_3^k$$

Réécrivons le Lagrangien :

$$L = \theta_N^2 + \theta_0^2 + \sum_{j=1}^N (\theta_j - \theta_{j-1})^2 + \gamma \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-j-1} \theta_k \right)^2 + 2\Omega_1 \left(\sum_{j=0}^N \theta_j - 1 \right) + 2\Omega_2 \left(\sum_{j=0}^N [j * \theta_j] - N \right)$$

où $\theta_k = \alpha_0 r_0^k + \alpha_1 r_1^k + \alpha_2 r_2^k + \alpha_3 r_3^k$ et donc $\frac{d\theta_k}{d\alpha_i} = r_i^k$

On a quatre équations du type $0 = \frac{dL}{d\alpha_i}$ comme first order condition et les deux contraintes.

Donc 6 équations et 6 inconnues (les α et Ω).

$$0 = \frac{dL}{d\alpha_i} = 2\theta_N r_i^N + 2\theta_0 + 2 \sum_{j=1}^N [(\theta_j - \theta_{j-1})(r_i^j - r_i^{j-1})] + 2\gamma \sum_{j=0}^{N-1} \left[\left(\sum_{k=0}^{N-j-1} \theta_k \right) \left(\sum_{k=0}^{N-j-1} r_i^k \right) \right] + 2\Omega_1 \sum_{j=0}^N r_i^j + 2\Omega_2 \sum_{j=0}^N [j r_i^j]$$

$$0 = (\alpha_0 r_0^N + \alpha_1 r_1^N + \alpha_2 r_2^N + \alpha_3 r_3^N) r_i^N + (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \sum_{j=1}^N [(\alpha_0 (r_0^j - r_0^{j-1}) + \alpha_1 (r_1^j - r_1^{j-1}) + \alpha_2 (r_2^j - r_2^{j-1}) + \alpha_3 (r_3^{kj} - r_3^{j-1})) (r_i^j - r_i^{j-1})] + \gamma \sum_{j=0}^{N-1} \left[\left(\sum_{k=0}^{N-j-1} (\alpha_0 r_0^k + \alpha_1 r_1^k + \alpha_2 r_2^k + \alpha_3 r_3^k) \right) \left(\sum_{k=0}^{N-j-1} r_i^k \right) \right] + \Omega_1 \sum_{j=0}^N r_i^j + \Omega_2 \sum_{j=0}^N [j r_i^j]$$

$$0 = r_i^N \sum_{k=0}^3 [\alpha_k r_k^N] + \sum_{k=0}^3 \alpha_k + \sum_{k=0}^3 \left[\alpha_k \sum_{j=1}^N [(r_k^j - r_k^{j-1})(r_i^j - r_i^{j-1})] \right] \\ + \gamma \sum_{l=0}^3 \alpha_l \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-j-1} r_l^k \sum_{k=0}^{N-j-1} r_i^k \right) \right\} + \Omega_1 \sum_{j=0}^N r_i^j + \Omega_2 \sum_{j=0}^N [j r_i^j]$$

Définissons

$$\psi_N(x) \equiv \sum_{k=0}^N x^k = \begin{cases} \frac{1-x^{N+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ N+1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$\tilde{\psi}_N(x) \equiv \sum_{k=0}^N kx^k = \begin{cases} \frac{x}{1-x} \left[\frac{1-x^N}{1-x} - x^N N \right] & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{N(N+1)}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$\Phi_N(r_i, r_j) \equiv \sum_{k=1}^N [(r_i^k - r_i^{k-1})(r_j^k - r_j^{k-1})] = (1-r_i)(1-r_j) \sum_{k=0}^{N-1} (r_i r_j)^k \\ = \begin{cases} (1-r_i)(1-r_j) \frac{1-(r_i r_j)^N}{1-r_i r_j} & \text{si } r_i r_j \neq 1 \\ (1-r_i)(1-r_j)N & \text{si } r_i r_j = 1 \end{cases}$$

On peut alors réécrire les First-order conditions ainsi :

$$0 = r_i^N \sum_{k=0}^3 [\alpha_k r_k^N] + \sum_{k=0}^3 \alpha_k + \sum_{k=0}^3 [\alpha_k \Phi_N(r_k, r_i)] + \gamma \sum_{l=0}^3 \alpha_l \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} (\psi_{N-j-1}(r_l) \psi_{N-j-1}(r_i)) \right\} \\ + \Omega_1 \psi_N(r_i) + \Omega_2 \tilde{\psi}_N(r_i)$$

La dernière somme où N apparait dans les bornes de l'indice de sommation peut être remplacée par un terme sans signe de sommation en notant que :

$$\sum_{k=0}^{N-1} (\psi_{N-k-1}(r_j) \psi_{N-k-1}(r_i)) \\ = \frac{1}{(1-r_i)(1-r_j)} [N - r_j^N \psi_{N-1}(r_j^{-1}) - r_i^N \psi_{N-1}(r_i^{-1}) + (r_i r_j)^N \psi_{N-1}(r_i^{-1} r_j^{-1})]$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{N-1} (\psi_{N-k-1}(r_j)\psi_{N-k-1}(r_i)) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1-r_i^{N-k}}{1-r_i} \frac{1-r_j^{N-k}}{1-r_j} \right) \\
&= \frac{1}{(1-r_i)(1-r_j)} \sum_{k=0}^{N-1} [(1-r_i^{N-k})(1-r_j^{N-k})] \\
&= \frac{1}{(1-r_i)(1-r_j)} \sum_{k=0}^{N-1} [1-r_j^{N-k} - r_i^{N-k} + r_i^{N-k}r_j^{N-k}] = \frac{1}{(1-r_i)(1-r_j)} \left[\sum_{k=0}^{N-1} 1 \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k=0}^{N-1} r_j^{N-k} - \sum_{k=0}^{N-1} r_i^{N-k} + \sum_{k=0}^{N-1} (r_i r_j)^{N-k} \right] \\
&= \frac{1}{(1-r_i)(1-r_j)} \left[\sum_{k=0}^{N-1} 1 - r_j^N \sum_{k=0}^{N-1} r_j^{-k} - r_i^N \sum_{k=0}^{N-1} r_i^{-k} + (r_i r_j)^N \sum_{k=0}^{N-1} (r_i r_j)^{-k} \right] \\
&= \frac{1}{(1-r_i)(1-r_j)} [N - r_j^N \psi_{N-1}(r_j^{-1}) - r_i^N \psi_{N-1}(r_i^{-1}) + (r_i r_j)^N \psi_{N-1}(r_i^{-1} r_j^{-1})]
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
0 &= r_i^N \sum_{k=0}^3 [\alpha_k r_k^N] + \sum_{k=0}^3 \alpha_k + \sum_{k=0}^3 [\alpha_k \Phi_N(r_k, r_i)] \\
&\quad + \gamma \sum_{l=0}^3 \alpha_l \left\{ \frac{1}{(1-r_i)(1-r_l)} [N - r_l^N \psi_{N-1}(r_l^{-1}) - r_i^N \psi_{N-1}(r_i^{-1}) \right. \\
&\quad \left. + (r_i r_l)^N \psi_{N-1}(r_i^{-1} r_l^{-1}) \right\} + \Omega_1 \psi_N(r_i) + \Omega_2 \tilde{\psi}_N(r_i)
\end{aligned}$$

Que l'on peut écrire plus brièvement en définissant :

$$\begin{aligned}
f_i(k) &\equiv r_i^N r_k^N + 1 + \Phi_N(r_k, r_i) + \gamma \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} (\psi_{N-j-1}(r_k)\psi_{N-j-1}(r_i)) \right\} \\
&= r_i^N r_k^N + 1 + \Phi_N(r_k, r_i) \\
&\quad + \gamma \left\{ \frac{1}{(1-r_i)(1-r_k)} [N - r_k^N \psi_{N-1}(r_k^{-1}) - r_i^N \psi_{N-1}(r_i^{-1}) \right. \\
&\quad \left. + (r_i r_k)^N \psi_{N-1}(r_i^{-1} r_k^{-1}) \right\}
\end{aligned}$$

On a alors :

$$0 = \sum_{k=0}^3 [\alpha_k f_i(k)] + \Omega_1 \psi_N(r_i) + \Omega_2 \tilde{\psi}_N(r_i)$$

Qui peut s'écrire sous forme matricielle (en ajoutant les deux contraintes) :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0(0) & f_0(1) & f_0(2) & f_0(3) & \psi_N(r_0) & \tilde{\psi}_N(r_0) \\ f_1(0) & f_1(1) & f_1(2) & f_1(3) & \psi_N(r_1) & \tilde{\psi}_N(r_1) \\ f_2(0) & f_2(1) & f_2(2) & f_2(3) & \psi_N(r_2) & \tilde{\psi}_N(r_2) \\ f_3(0) & f_3(1) & f_3(2) & f_3(3) & \psi_N(r_3) & \tilde{\psi}_N(r_3) \\ \psi_N(r_0) & \psi_N(r_1) & \psi_N(r_2) & \psi_N(r_3) & 0 & 0 \\ \tilde{\psi}_N(r_0) & \tilde{\psi}_N(r_1) & \tilde{\psi}_N(r_2) & \tilde{\psi}_N(r_3) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix}$$

Comme $f_i(k) = f_i(k)$, la matrice 6x6 est symétrique et donc inversible.

Ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0(0) & f_0(1) & f_0(2) & f_0(3) & \psi_N(r_0) & \tilde{\psi}_N(r_0) \\ f_1(0) & f_1(1) & f_1(2) & f_1(3) & \psi_N(r_1) & \tilde{\psi}_N(r_1) \\ f_2(0) & f_2(1) & f_2(2) & f_2(3) & \psi_N(r_2) & \tilde{\psi}_N(r_2) \\ f_3(0) & f_3(1) & f_3(2) & f_3(3) & \psi_N(r_3) & \tilde{\psi}_N(r_3) \\ \psi_N(r_0) & \psi_N(r_1) & \psi_N(r_2) & \psi_N(r_3) & 0 & 0 \\ \tilde{\psi}_N(r_0) & \tilde{\psi}_N(r_1) & \tilde{\psi}_N(r_2) & \tilde{\psi}_N(r_3) & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ N \end{bmatrix}$$

Annexe II : Démonstration de la formule de ROLUFd

Nous cherchons le filtre univarié linéaire (et tel que le trend d'une droite est cette droite) qui donne un trend τ_t minimisant récursivement la fonction de coût suivante (volatilité du PIB trend mesurée par la variance des différences de trend entre deux périodes consécutives) sur une marche d'escalier :

$$\underset{\tau}{MIN} \left[\sum_{j=0}^N [(\tau_j - \tau_{j-1}) - \text{moyenne}(\tau - \tau_{\text{précédent}})]^2 \right]$$

ROLUFd(N) signifie Recursively Optimal Linear Univariate Filter qui minimise la variance de la première Différence du trend. Le filtre s'applique récursivement sur une fenêtre allant de $t - N$ à t (comprenant donc $N + 1$ points).

Solution

Soit $\tau_t = \sum_{j=0}^N [\theta_j x_{t-N+j}]$ le trend du filtre appliqué à la série sous-jacente x_t

$$\underset{\tau}{MIN} \left[\sum_{j=0}^N [(\tau_j - \tau_{j-1}) - \text{moyenne}(\tau - \tau_{\text{précédent}})]^2 \right]$$

st: $\sum_{j=0}^N \theta_j = 1$ et $\sum_{j=0}^N [j * \theta_j] = N$

Selon §2.1 $\tau_t - \tau_{t-1} = -\theta_{N-t}$

si on prend la moyenne des $\tau - \tau_{\text{précédent}}$ uniquement dans la zone où $\tau_j - \tau_{j-1}$ pourrait être non nul, on obtient : $\text{moyenne}(\theta) = \frac{\sum_{j=0}^N \theta_j}{N+1} = \frac{1}{N+1}$, on a : $\underset{\tau}{MIN} \left[\sum_{j=0}^N \left[\theta_{N-t} - \frac{1}{N+1} \right]^2 \right]$

Nous allons toutefois être un peu plus général en prenant la moyenne sur une zone qui doit englober la zone où $\tau_j - \tau_{j-1}$ pourrait être non nul, mais peut la dépasser. Les $\tau_j - \tau_{j-1}$ supplémentaires seront alors nuls et la moyenne sera $\text{moyenne}(\theta) = \frac{\sum_{j=0}^N \theta_j}{m} = \frac{1}{m}$ où m est le nombre de points dans la zone où l'on prend la moyenne (on retrouve le résultat précédent si l'on pose $m = N + 1$).

La fonction de coût à minimiser peut donc s'écrire :

$$\underset{\tau}{MIN} \left[\sum_{j=0}^N \left[\theta_{N-t} - \text{moyenne}(\theta) \right]^2 \right] = \underset{\tau}{MIN} \left[\sum_{j=0}^N \left[\theta_{N-t} - \frac{1}{m} \right]^2 \right]$$

Le Lagrangien est :

$$L = \sum_{j=0}^N \left[\theta_{N-t} - \frac{1}{m} \right]^2 + 2\Omega_1 \left(\sum_{j=0}^N \theta_j - 1 \right) + 2\Omega_2 \left(\sum_{j=0}^N [j * \theta_j] - N \right)$$

First-order conditions :

$$0 = \frac{dL}{d\theta_j} = 2 \left[\theta_j - \frac{1}{m} \right] + 2\Omega_1 + 2\Omega_2 j$$

donc

$$\theta_j = \frac{1}{m} - \Omega_1 - \Omega_2 j$$

θ_j est complètement déterminé connaissant Ω_1 et Ω_2 . Utilisons les deux contraintes pour calculer ces deux inconnues.

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{j=0}^N \theta_j = \sum_{j=0}^N \left(\frac{1}{m} - \Omega_1 - \Omega_2 j \right) = \frac{N+1}{m} - (N+1)\Omega_1 - \Omega_2 \sum_{j=0}^N j \\ &= \frac{N+1}{m} - (N+1)\Omega_1 - \Omega_2 \frac{N(N+1)}{2} \end{aligned}$$

donc

$$\Omega_1 = \frac{1}{m} - \frac{1}{N+1} - \Omega_2 \frac{N}{2}$$

Et

$$\begin{aligned} N &= \sum_{j=0}^N [j * \theta_j] = \sum_{j=0}^N [j \left(\frac{1}{m} - \Omega_1 - \Omega_2 j \right)] = \left(\frac{1}{m} - \Omega_1 \right) \sum_{j=0}^N j - \Omega_2 \sum_{j=0}^N j^2 \\ &= \left(\frac{1}{m} - \Omega_1 \right) \frac{N(N+1)}{2} - \Omega_2 \frac{1}{6} N(N+1)(2N+1) = \\ &= \frac{N(N+1)}{2m} - \Omega_1 \frac{N(N+1)}{2} - \Omega_2 \frac{1}{6} N(N+1)(2N+1) \end{aligned}$$

donc

$$2 - \frac{N+1}{m} = -\Omega_1(N+1) - \Omega_2 \frac{1}{3} (N+1)(2N+1)$$

En combinant ces deux contraintes on obtient:

$$\Omega_1 = \frac{1}{m} - \frac{1}{N+1} - \Omega_2 \frac{N}{2}$$

$$2 - \frac{N+1}{m} = -\Omega_1(N+1) - \Omega_2 \frac{1}{3} (N+1)(2N+1)$$

=>

$$2 - \frac{N+1}{m} + \frac{N+1}{m} - 1 = \Omega_2 \left[\frac{N(N+1)}{2} - \frac{1}{3} (N+1)(2N+1) \right]$$

m disparaît de l'équation

$$\Omega_2 = \frac{1}{(N+1) \left(\frac{N}{2} - \frac{1}{3} (2N+1) \right)} = - \frac{3}{(1+N) \left(1 + \frac{N}{2} \right)}$$

Mais m réapparaît dans le calcul de Ω_1 :

$$\Omega_1 = \frac{1}{m} - \frac{1}{N+1} - \Omega_2 \frac{N}{2} = \frac{1}{m} - \frac{1}{N+1} + \frac{3}{(1+N)(1+\frac{N}{2})} \frac{N}{2}$$

$$\Omega_1 = \frac{1}{m} - \frac{1}{N+1} + \frac{3}{(1+N)(1+\frac{N}{2})} \frac{N}{2}$$

et

$$\theta_j = \frac{1}{m} - \Omega_1 - \Omega_2 j = \frac{1}{m} - \frac{1}{m} + \frac{1}{N+1} + \frac{-3\frac{N}{2} + 3j}{(1+N)(1+\frac{N}{2})} = \frac{1-N+3j}{(1+N)(1+\frac{N}{2})}$$

donc

$$\theta_j = \frac{1-N+3j}{(1+N)(1+\frac{N}{2})}$$

La solution est donc indépendante de m .

Annexe III : Démonstration de la formule de ROLUFmgdd

Nous cherchons le filtre univarié linéaire (et tel que le trend d'une droite est cette droite) qui donne un trend X minimisant récursivement la fonction de coût suivante (fonction de coût identique à celle de HP, sauf que la somme des carrés des output gaps a été remplacée par le carré de la somme des output gaps) sur un coude x :

$$\min_X \left\{ \left(\sum_{t=-\infty}^{\infty} (x_t - X_t) \right)^2 + \lambda \sum_{j=-\infty}^{\infty} [(X_{t+1} - X_t) - (X_t - X_{t-1})]^2 \right\}$$

ROLUFmgdd(λ, N) signifie Recursively Optimal Linear Univariate Filter qui minimise une fonction de coût dont une composante est liée à l'output gap moyen (Mean Gap) et la seconde concerne la volatilité du PIB trend mesurée par la variance de la Différence de la Différence. Le poids relatif de ces deux composantes est déterminé par le smoothing paramer λ (plus λ est élevé, plus le poids relatif de la volatilité du PIB trend est élevé). Le filtre s'applique récursivement sur une fenêtre allant de $t - N$ à t (comprenant donc $N + 1$ points).

Pourquoi chercher le filtre optimal sur un coude plutôt qu'une marche d'escalier comme pour les autres filtres ? Nous avons initialement calculé le filtre optimal sur la série la plus simple, c'est-à-dire en forme de marche d'escalier. Nous avons toutefois découvert que, même en application récursive, l'output gap moyen devient exactement nul en un temps fini pour tout filtre linéaire univarié tel que son trend d'une droite est cette droite (voir §2.2). La composante de la fonction de coût reflétant le désir d'un output gap moyen proche de zéro perd alors tout pouvoir discriminant. C'est pourquoi nous avons opté pour appliquer le filtre sur une série différente, qui reste toutefois encore simple et à partir de laquelle on peut engendrer une série quelconque : le coude.

Solution

Série ayant la forme de coude

Nous considérons le cas où la série sur laquelle le filtre est appliqué suit le coude suivant :

$$\begin{cases} x_t = -t \text{ si } t < 0 \\ x_t = 0 \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

Ce coude représente tous les coudes sans perte de généralité. En effet, un coude en t_0 de pente μ_1 avant t_0 et μ_2 après, avec une position du coude en $\langle t_0; \mu_0 \rangle$ peut s'écrire sous la forme : $z_t = \mu_0 + \mu_1 x_{t-t_0} + \mu_2 (t - t_0)$. Si le filtre est linéaire, le trend de z_t est connu quand le trend de x_t est connu. De plus, si le filtre est linéaire (et si son trend d'une droite est cette droite), si $X_t = F(x)$ minimise la fonction de coût ci-dessus, alors $Z_t = F(\mu_0 + \mu_1 x_{t-t_0} + \mu_2 (t - t_0)) = F(\mu_0) + F(\mu_1 x_{t-t_0}) + F(\mu_2 (t - t_0)) = \mu_0 + \mu_1 F(x_{t-t_0}) + \mu_2 (t - t_0) = \mu_0 + \mu_1 X_{t-t_0} + \mu_2 (t - t_0)$ minimise

$$\min_Z \left\{ \left(\sum_{t=t_0}^{t_0+N} (z_t - Z_t) \right)^2 + \lambda \sum_{t=t_0+1}^{t_0+N} [(Z_{t+1} - Z_t) - (Z_t - Z_{t-1})]^2 \right\}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{t=t_0}^N (Z_t - Z_t) \right)^2 + \lambda \sum_{t=t_0+1}^{t_0+N} [(Z_{t+1} - Z_t) - (Z_t - Z_{t-1})]^2 = \mu_1^2 \left(\sum_{t=t_0}^{t_0+N} (x_{t-t_0} - X_{t-t_0}) \right)^2 \\
& + \lambda \sum_{t=t_0+1}^{t_0+N} [(\mu_1 X_{t+1-t_0} - \mu_1 X_{t-t_0} + \mu_2) - (\mu_1 X_{t-t_0} - \mu_1 X_{t-1-t_0} + \mu_2)]^2 \\
& = \mu_1^2 \left\{ \left(\sum_{t=t_0}^{t_0+N} (x_{t-t_0} - X_{t-t_0}) \right)^2 \right. \\
& \left. + \lambda \sum_{t=t_0+1}^{t_0+N} [(X_{t+1-t_0} - X_{t-t_0}) - (X_{t-t_0} - X_{t-1-t_0})]^2 \right\}
\end{aligned}$$

La forme particulière du coude x simplifie les calculs. Mais connaître le filtre optimal sur ce coude, c'est connaître le filtre optimal sur tous les coudes. De plus, toute série annuelle (ou toute série partout discontinue) peut être écrite comme une somme de coudes. Or le trend d'un filtre linéaire sur une somme de coudes est la somme des trends sur les différents coudes. La présence de coudes incomplètement « digérés » lorsque le filtre est appliqué sur une série quelconque pour une période donnée pose toutefois un problème analogue aux marches d'escalier incomplètement « digérés » discutées en introduction (§0).

Ecriture du problème d'optimisation en fonction des poids θ_j du filtre

Soit $\tau_t = \sum_{j=0}^N [\theta_j x_{t-N+j}]$ le trend du filtre appliqué à série sous-jacente x_t

Comme pour les autres filtres optimaux, nous demandons que le trend d'une droite soit une droite. Nous avons vu au §2.1 que cela implique $\sum_{j=0}^N \theta_j = 1$ et $\sum_{j=0}^N [j * \theta_j] = N$

Le trend d'un tel filtre appliqué sur le coude x_t est :

$$\tau_t = \begin{cases} -t & \text{si } t \leq 0 \\ -t + \sum_{j=0}^{t-1} [(t-j)\theta_{N-j}] & \text{si } 1 \leq t \leq N \\ 0 & \text{si } t \geq N \end{cases}$$

En effet, jusqu'au temps $t = 0$ (compris), la série est une droite et son trend est égal à cette droite. Pour $t = 1$, X_1 aurait été égal à -1 s'il n'y avait pas eu de coude et que la droite - t (Geben Sie hier eine Formel ein. avait continué sa trajectoire. En réalité, x_1 a été augmenté de 1 par rapport à cette droite, ce qui dans la formule $X_1 = \sum_{j=0}^N [\theta_j x_{1-N+j}]$ implique d'ajouter un terme θ_N . Donc $X_1 = -1 + \theta_N$. Pour $t = 2$, X_2 aurait été égal à -2 s'il n'y avait pas eu de coude. En réalité, x_2 a été augmenté de 2 par rapport à cette droite, ce qui implique d'ajouter un terme $2\theta_N$ (à cause de x_2) et θ_{N-1} (à cause de x_1) : $X_2 = -2 + \theta_{N-1} + 2\theta_N$. Plus généralement : $X_t = -t + \sum_{j=0}^{t-1} [(t-j)\theta_{N-j}]$. Pour $t = N$, cette formule donne $X_N = -N + \sum_{j=0}^{N-1} [(N-j)\theta_{N-j}] = -N + \sum_{i=1}^N [i\theta_i] = -N + \sum_{i=0}^N [i\theta_i] = 0$ et le trend a rejoint la série. En fait, à partir du temps $t = N$, la série est constamment nulle dans la fenêtre temporelle où le filtre est appliqué. A partir de $t = N$ (compris), le trend est donc égal à la série sur laquelle le filtre est appliqué.

Etudions les composantes de la fonction de coût que minimise $\text{ROLUFmgdd}(\lambda;N)$.

Somme des output gaps

L'output gap est nul pour $t \leq 0$ et $t \geq N$. Pour $t \in [1; N - 1]$ l'output gap est donné par :

$$x_t - X_t = 0 - [-t + \sum_{j=0}^{t-1} [(t-j)\theta_{N-j}]] = t - \sum_{j=0}^{t-1} [(t-j)\theta_{N-j}]$$

La somme des output gaps est alors :

$$\begin{aligned} \sum_{t=-\infty}^{\infty} (x_t - X_t) &= \sum_{t=1}^{N-1} (x_t - X_t) = \sum_{t=1}^{N-1} \left(t - \sum_{j=0}^{t-1} [(t-j)\theta_{N-j}] \right) = \sum_{t=1}^{N-1} t - \sum_{t=1}^{N-1} \left(\sum_{j=0}^{t-1} [(t-j)\theta_{N-j}] \right) \\ &= \frac{(N-1)N}{2} - \sum_{t=1}^{N-1} \left(\sum_{j=0}^{t-1} [(t-j)\theta_{N-j}] \right) \end{aligned}$$

Le terme $\sum_{t=1}^{N-1} (\sum_{j=0}^{t-1} [(t-j)\theta_{N-j}])$ calcule la somme des θ dans chaque colonne, puis additionne ces sommes.

$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$...	$t = N - 3$	$t = N - 2$	$t = N - 1$
			...			θ_2
			...		θ_3	$2\theta_3$
			...	θ_4	$2\theta_4$	$3\theta_4$
...
		θ_{N-2}	...	$(N-5)\theta_{N-2}$	$(N-4)\theta_{N-2}$	$(N-3)\theta_{N-2}$
	θ_{N-1}	$2\theta_{N-1}$...	$(N-4)\theta_{N-1}$	$(N-3)\theta_{N-1}$	$(N-2)\theta_{N-1}$
θ_N	$2\theta_N$	$3\theta_N$...	$(N-3)\theta_N$	$(N-2)\theta_N$	$(N-1)\theta_N$

On arrive au même résultat en calculant d'abord la somme sur chaque ligne, puis en additionnant ces sommes. Notons que dans une ligne, c'est toujours le même θ qui intervient. La somme sur la dernière ligne est $\sum_{t=1}^{N-1} (t\theta_N) = \theta_N \sum_{t=1}^{N-1} t$. Plus généralement, la somme sur la ligne l (en comptant la dernière ligne de ce tableau comme étant la ligne 0, l'avant dernière la ligne 1, etc., jusqu'à la ligne $N - 2$) est $\theta_{N-l} \sum_{t=1}^{N-1-l} t = \theta_{N-l} \frac{(N-1-l)(N-l)}{2}$. L'addition de ces sommes est $\sum_{l=0}^{N-2} [\theta_{N-l} \frac{(N-1-l)(N-l)}{2}] = \sum_{j=2}^N [\theta_j \frac{(j-1)j}{2}] = \frac{1}{2} \{ \sum_{j=2}^N [\theta_j j^2] - \sum_{j=2}^N [\theta_j j] \} = \frac{1}{2} \{ \theta_1 - N + \sum_{j=2}^N (\theta_j j^2) \} = \frac{1}{2} \{ -N + \sum_{j=1}^N (\theta_j j^2) \}$

La somme des output gap est donc:

$$\text{Somme des output gaps} = \frac{(N-1)N}{2} - \frac{1}{2} \left[-N + \sum_{j=1}^N (\theta_j j^2) \right] = \frac{1}{2} \left[N^2 - \sum_{j=1}^N (\theta_j j^2) \right]$$

Volatilité du PIB trend

En ce qui concerne la croissance du trend, notons que pour $2 \leq t \leq N$

$$\begin{aligned} X_t - X_{t-1} &= -t + \sum_{j=0}^{t-1} [(t-j)\theta_{N-j}] - (-(t-1) + \sum_{j=0}^{t-2} [(t-1-j)\theta_{N-j}]) \\ &= -1 + \sum_{j=0}^{t-1} [(t-j)\theta_{N-j}] - \sum_{j=0}^{t-2} [(t-1-j)\theta_{N-j}] = -1 + \sum_{j=0}^{t-1} [(t-j)\theta_{N-j}] - \sum_{j=0}^{t-1} [(t-1-j)\theta_{N-j}] \\ &= -1 + \sum_{j=0}^{t-1} \theta_{N-j} = -\sum_{j=0}^N \theta_{N-j} + \sum_{j=0}^{t-1} \theta_{N-j} = -\sum_{j=t}^N \theta_{N-j} \end{aligned}$$

Donc pour $2 \leq t \leq N-1$:

$$[(X_{t+1} - X_t) - (X_t - X_{t-1})]^2 = \left[-\sum_{j=t+1}^N \theta_{N-j} + \sum_{j=t}^N \theta_{N-j} \right]^2 = \theta_{N-t}^2$$

Pour $t = N$ il faut ajouter le terme suivant :

$$[(X_{N+1} - X_N) - (X_N - X_{N-1})]^2 = \left[0 - \left(-\sum_{j=N}^N \theta_{N-j} \right) \right]^2 = \theta_0^2$$

Pour $t = 1$ et $t = 0$, il faut ajouter les termes suivants :

$$\begin{aligned} [(X_2 - X_1) - (X_1 - X_0)]^2 &= \left[-\sum_{j=2}^N \theta_{N-j} - (-1 + \theta_N - 0) \right]^2 = \left[-\sum_{k=0}^{N-2} \theta_k + 1 - \theta_N \right]^2 = \\ &= \left[-\sum_{k=0}^{N-2} \theta_k + \sum_{k=0}^N \theta_k - \theta_N \right]^2 = \left[-\sum_{k=0}^{N-2} \theta_k + \sum_{k=0}^{N-1} \theta_k \right]^2 = \theta_{N-1}^2 \end{aligned}$$

et

$$[(X_1 - X_0) - (X_0 - X_{-1})]^2 = [(X_1 - 0) - (0 - 1)]^2 = [1 + X_1]^2 = [1 - 1 + \theta_N]^2 = \theta_N^2$$

Les autres termes sont nuls.

La somme des coudes du trend au carré est donc égale à :

$$\theta_0^2 + \theta_{N-1}^2 + \theta_N^2 + \sum_{j=1}^{N-2} \theta_j^2 = \sum_{j=0}^N \theta_j^2$$

La fonction de coût à minimiser est donc :

$$\text{MIN}_{\{\theta_j\}_{j=0}^N} \left[\frac{1}{4} \left(N^2 - \sum_{j=1}^N (\theta_j j^2) \right)^2 + \lambda \sum_{j=0}^N \theta_j^2 \right]$$

Que l'on écrit :

$$\text{MIN}_{\{\theta_j\}_{j=0}^N} \left[\sum_{j=0}^N \theta_j^2 + \frac{\gamma}{4} \left(N^2 - \sum_{j=1}^N (\theta_j j^2) \right)^2 \right]$$

où $\gamma = \frac{1}{\lambda}$.

Il s'agit donc de résoudre le problème suivant :

$$\text{MIN}_{\{\theta_j\}_{j=0}^N} \left[\sum_{j=0}^N \theta_j^2 + \frac{\gamma}{4} \left(N^2 - \sum_{j=1}^N (\theta_j j^2) \right)^2 \right]$$

st:

$$\sum_{j=0}^N \theta_j = 1$$

$$\sum_{j=0}^N [j * \theta_j] = N$$

Stratégie de résolution

La solution sera obtenue de la façon suivante. D'abord nous calculons le Lagrangien. Nous en déduisons que les θ_k suivent une parabole $\theta_k = \alpha_0 + \alpha_1 k + \alpha_2 k^2$

où $\alpha_0 = \theta_0$, $\alpha_1 = \theta_1 - \theta_0 - \frac{\gamma}{4} (N^2 - \sum_{j=1}^N (\theta_j j^2))$ et $\alpha_2 = \frac{\gamma}{4} (N^2 - \sum_{j=1}^N (\theta_j j^2))$

On peut utiliser cette expression pour calculer $\sum_{j=1}^N (\theta_j j^2)$. On obtient :

$$\sum_{j=1}^N (\theta_j j^2) = \frac{\theta_0 (\sum_{k=1}^N k^2 - \sum_{k=1}^N k^3) + \theta_1 \sum_{k=1}^N k^3 + \frac{\gamma}{4} N^2 (\sum_{k=1}^N k^4 - \sum_{k=1}^N k^3)}{1 + \frac{\gamma}{4} (\sum_{k=1}^N k^4 - \sum_{k=1}^N k^3)}$$

$\sum_{j=1}^N (\theta_j j^2)$ ne dépend que de θ_0 , θ_1 , γ et N .

θ_k peut donc s'écrire en fonction de θ_0 , θ_1 , γ et N .

θ_0 et θ_1 sont deux inconnues qui peuvent être déduites des deux contraintes $\sum_{j=0}^N \theta_j = 1$ et $\sum_{j=0}^N [j * \theta_j] = N$, alors que γ et N sont donnés.

Résolution

Le Lagrangien est :

$$L = \sum_{j=0}^N \theta_j^2 + \frac{\gamma}{4} \left(N^2 - \sum_{j=1}^N (\theta_j j^2) \right)^2 + 2\Omega_1 \left(\sum_{j=0}^N \theta_j - 1 \right) + 2\Omega_2 \left(\sum_{j=0}^N [j * \theta_j] - N \right)$$

$$0 = \frac{dL}{d\theta_k} = 2\theta_k - 2 \frac{\gamma}{4} \left(N^2 - \sum_{j=1}^N (\theta_j j^2) \right) k^2 + 2\Omega_1 + 2\Omega_2 k$$

$$0 = \theta_k + \frac{\gamma}{4} \left(-N^2 + \sum_{j=1}^N (\theta_j j^2) \right) k^2 + \Omega_1 + \Omega_2 k$$

C'est-à-dire :

$$\theta_k = \frac{\gamma}{4} \left(N^2 - \sum_{j=1}^N (\theta_j j^2) \right) k^2 - \Omega_1 - \Omega_2 k$$

θ_k suit donc une parabole.

On peut écrire les coefficients de cette parabole en fonction de θ_0 et θ_1 plutôt que Ω_1 et Ω_2 .

$$\theta_0 = \frac{\gamma}{4} \left(N^2 - \sum_{j=1}^N (\theta_j j^2) \right) 0^2 - \Omega_1 - \Omega_2 0 = -\Omega_1$$

$$\theta_1 = \frac{\gamma}{4} \left(N^2 - \sum_{j=1}^N (\theta_j j^2) \right) 1^2 - \Omega_1 - \Omega_2 1 = \frac{\gamma}{4} \left(N^2 - \sum_{j=1}^N (\theta_j j^2) \right) - \Omega_1 - \Omega_2$$

On a donc

$$\theta_k = \theta_0 + \left[\theta_1 - \theta_0 - \frac{\gamma}{4} \left(N^2 - \sum_{j=1}^N (\theta_j j^2) \right) \right] k + \frac{\gamma}{4} \left(N^2 - \sum_{j=1}^N (\theta_j j^2) \right) k^2$$

ou

$$\theta_k = \alpha_0 + \alpha_1 k + \alpha_2 k^2$$

$$\alpha_0 = \theta_0$$

$$\alpha_1 = \theta_1 - \theta_0 - \frac{\gamma}{4} \left(N^2 - \sum_{j=1}^N (\theta_j j^2) \right)$$

$$\alpha_2 = \frac{\gamma}{4} \left(N^2 - \sum_{j=1}^N (\theta_j j^2) \right)$$

Que l'on peut aussi écrire

$$\theta_k = \theta_0(1 - k) + \theta_1 k + \frac{\gamma}{4} \left(N^2 - \sum_{j=1}^N (\theta_j j^2) \right) k(k - 1)$$

Cherchons une expression pour $\sum_{k=1}^N (\theta_k k^2)$ en remplaçant θ_k par la formule précédente :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N (\theta_k k^2) &= \theta_0 \left(\sum_{k=1}^N k^2 - \sum_{k=1}^N k^3 \right) + \theta_1 \sum_{k=1}^N k^3 + \frac{\gamma}{4} \left(N^2 - \sum_{j=1}^N (\theta_j j^2) \right) \left(\sum_{k=1}^N k^4 - \sum_{k=1}^N k^3 \right) \\ \sum_{k=1}^N (\theta_k k^2) &= \frac{\theta_0 (\sum_{k=1}^N k^2 - \sum_{k=1}^N k^3) + \theta_1 \sum_{k=1}^N k^3 + \frac{\gamma}{4} N^2 (\sum_{k=1}^N k^4 - \sum_{k=1}^N k^3)}{1 + \frac{\gamma}{4} (\sum_{k=1}^N k^4 - \sum_{k=1}^N k^3)} \end{aligned}$$

(Si $\gamma = \infty$, alors $\sum_{k=1}^N (\theta_k k^2) = N^2$)

Définissons : $g(i) = \sum_{k=0}^N k^i$

$$g(0) = N + 1$$

$$g(1) = \frac{1}{2} N(N + 1)$$

$$g(2) = \frac{1}{6} N(N + 1)(2N + 1)$$

$$g(3) = \frac{1}{4} N^2(N + 1)^2$$

$$g(4) = \frac{1}{30} N(N + 1)(2N + 1)(3N^2 + 3N - 1)$$

$$\sum_{k=1}^N (\theta_k k^2) = \frac{\theta_0 [g(2) - g(3)] + \theta_1 g(3) + \frac{\gamma}{4} N^2 [g(4) - g(3)]}{1 + \frac{\gamma}{4} [g(4) - g(3)]} = a\theta_0 + b\theta_1 + c$$

où

$$a = \frac{g(2) - g(3)}{1 + \frac{\gamma}{4} (g(4) - g(3))}$$

$$b = \frac{g(3)}{1 + \frac{\gamma}{4} (g(4) - g(3))}$$

$$c = \frac{\gamma}{4} N^2 \frac{g(4) - g(3)}{1 + \frac{\gamma}{4} (g(4) - g(3))}$$

Remplaçons cette expression de $\sum_{k=1}^N (\theta_k k^2)$

dans $\theta_k = \theta_0(1 - k) + \theta_1 k + \frac{\gamma}{4}(N^2 - \sum_{j=1}^N (\theta_j j^2))(k^2 - k)$

$$\theta_k = \theta_0(1 - k) + \theta_1 k + \frac{\gamma}{4}(N^2 - a\theta_0 - b\theta_1 - c)(k^2 - k)$$

$$\theta_k = \theta_0 \left[1 - k - \frac{\gamma}{4}a(k^2 - k) \right] + \theta_1 \left[k - \frac{\gamma}{4}b(k^2 - k) \right] + \frac{\gamma}{4}(N^2 - c)(k^2 - k)$$

Utilisons les 2 contraintes $\sum_{k=0}^N \theta_k = 1$ et $\sum_{k=0}^N [k * \theta_k] = N$ pour calculer θ_0 et θ_1 :

$$1 = \theta_0 \left[g(0) - g(1) - \frac{\gamma}{4}a(g(2) - g(1)) \right] + \theta_1 \left[g(1) - \frac{\gamma}{4}b(g(2) - g(1)) \right] + \frac{\gamma}{4}(N^2 - c)(g(2) - g(1))$$

$$N = \theta_0 \left[g(1) - g(2) - \frac{\gamma}{4}a(g(3) - g(2)) \right] + \theta_1 \left[g(2) - \frac{\gamma}{4}b(g(3) - g(2)) \right] + \frac{\gamma}{4}(N^2 - c)(g(3) - g(2))$$

Définissons :

$$A_1 = g(0) - g(1) - \frac{\gamma}{4}a(g(2) - g(1))$$

$$B_1 = g(1) - \frac{\gamma}{4}b(g(2) - g(1))$$

$$C_1 = \frac{\gamma}{4}(N^2 - c)(g(2) - g(1))$$

$$A_2 = g(1) - g(2) - \frac{\gamma}{4}a(g(3) - g(2))$$

$$B_2 = g(2) - \frac{\gamma}{4}b(g(3) - g(2))$$

$$C_2 = \frac{\gamma}{4}(N^2 - c)(g(3) - g(2))$$

alors

$$1 = \theta_0 A_1 + \theta_1 B_1 + C_1$$

$$N = \theta_0 A_2 + \theta_1 B_2 + C_2$$

donc

$$B_2 = \theta_0 A_1 B_2 + \theta_1 B_1 B_2 + C_1 B_2$$

$$NB_1 = \theta_0 A_2 B_1 + \theta_1 B_1 B_2 + B_1 C_2$$

et

$$NB_1 - B_2 = \theta_0(A_2 B_1 - A_1 B_2) + \theta_1 B_1 B_2 - \theta_1 B_1 B_2 + B_1 C_2 - C_1 B_2$$

donc

$$\theta_0 = \frac{NB_1 - B_2 + C_1B_2 - B_1C_2}{A_2B_1 - A_1B_2}$$

$$\theta_1 = \frac{1 - \theta_0A_1 - C_1}{B_1}$$

Comme a , b et c ne dépendent que de γ et N , tel est aussi le cas pour A_1, B_1, C_1, A_2, B_2 et C_2 et donc pour θ_0 et θ_1 . Nous pouvons ainsi finalement calculer θ_k en fonction de γ et N . Il serait possible d'écrire une grosse formule indiquant explicitement comment θ_k dépend de γ et N en remplaçant a , b , c , A_1, B_1, C_1, A_2, B_2 et C_2 par leur expression en fonction de γ et N . Mais cela donnerait une expression monstrueuse. Il est toutefois utile d'effectuer une partie de ce travail en remplaçant a , b et c par leur expression dans

$$\theta_k = \theta_0 \left[1 - k - \frac{\gamma}{4} a(k^2 - k) \right] + \theta_1 \left[k - \frac{\gamma}{4} b(k^2 - k) \right] + \frac{\gamma}{4} (N^2 - c)(k^2 - k)$$

En effet, $c = N^2$ quand $\gamma = \infty$, ce qui conduit à un terme $\gamma(N^2 - c)$ indéterminé. Le remplacement de c par son expression en fonction de γ et N est nécessaire pour lever cette indétermination. Remplacer a , b et c par leur expression donne

$$\begin{aligned} \theta_k &= \theta_0(1 - k) + \theta_1 k \\ &+ \frac{\gamma}{4} \left(N^2 - \frac{g(2) - g(3)}{1 + \frac{\gamma}{4}(g(4) - g(3))} \theta_0 - \frac{g(3)}{1 + \frac{\gamma}{4}(g(4) - g(3))} \theta_1 \right. \\ &\left. - \frac{\gamma}{4} N^2 \frac{g(4) - g(3)}{1 + \frac{\gamma}{4}(g(4) - g(3))} \right) (k^2 - k) \end{aligned}$$

$$\theta_k = \theta_0(1 - k) + \theta_1 k + \frac{\gamma}{4} \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{4}(g(4) - g(3))} [N^2 - (g(2) - g(3))\theta_0 - g(3)\theta_1] (k^2 - k)$$

Pour éviter des expressions indéterminées quand $\gamma = \infty$, il faut aussi remplacer a , b et c par leur expression dans A_1, B_1, C_1, A_2, B_2 et C_2 . Si on écrit toutes les formules en remplaçant a , b et c par leur expression, et si on utilise l'expression

$\frac{\gamma}{4} \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{4}(g(4) - g(3))} = \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{4}(g(4) - g(3))} \right] \frac{1}{g(4) - g(3)} = \frac{\Omega}{g(4) - g(3)}$ pour que γ n'apparaisse qu'une fois au lieu de deux (ce qui évite un terme $\frac{\infty}{\infty}$ quand $\gamma = \infty$, tout en évitant une division par zéro quand $\gamma = 0$), alors on obtient :

$$\theta_0 = \frac{NB_1 - B_2 + C_1B_2 - B_1C_2}{A_2B_1 - A_1B_2}$$

$$\theta_1 = \frac{1 - \theta_0A_1 - C_1}{B_1}$$

$$\theta_k = \theta_0(1 - k) + \theta_1 k + \frac{\Omega}{g(4) - g(3)} [N^2 - (g(2) - g(3))\theta_0 - g(3)\theta_1] k(k - 1)$$

$$A_1 = g(0) - g(1) - \Omega \frac{g(2) - g(3)}{g(4) - g(3)} (g(2) - g(1))$$

$$B_1 = g(1) - \Omega \frac{g(3)}{g(4) - g(3)} (g(2) - g(1))$$

$$C_1 = N^2 \Omega \frac{g(2) - g(1)}{g(4) - g(3)}$$

$$A_2 = g(1) - g(2) - \Omega \frac{g(2) - g(3)}{g(4) - g(3)} (g(3) - g(2))$$

$$B_2 = g(2) - \Omega \frac{g(3)}{g(4) - g(3)} (g(3) - g(2))$$

$$C_2 = N^2 \Omega \frac{g(3) - g(2)}{g(4) - g(3)}$$

$$\Omega = 1 - \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{4} (g(4) - g(3))}$$

$$g(i) = \sum_{k=0}^N k^i$$

$$g(0) = N + 1$$

$$g(1) = \frac{1}{2} N(N + 1)$$

$$g(2) = \frac{1}{6} N(N + 1)(2N + 1)$$

$$g(3) = \frac{1}{4} N^2(N + 1)^2$$

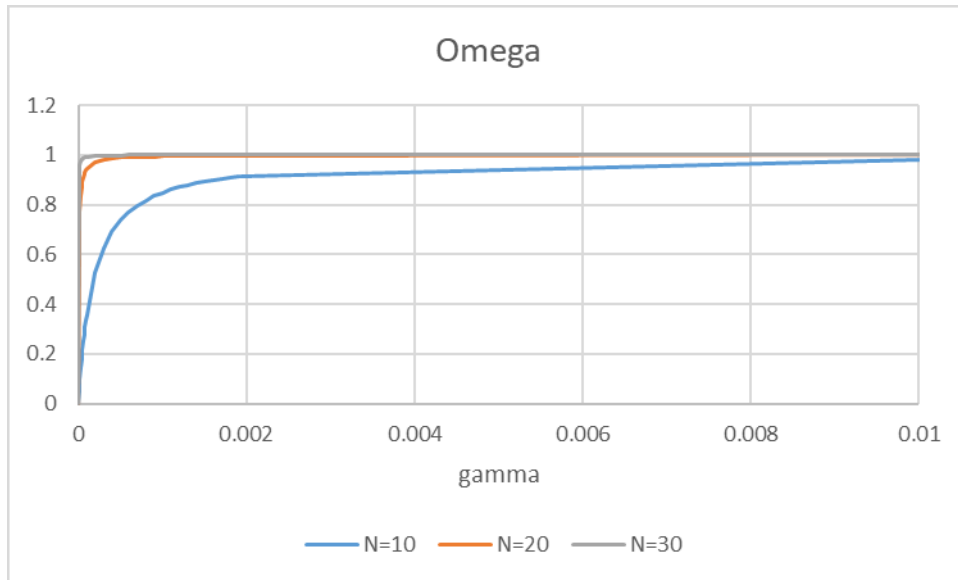
$$g(4) = \frac{1}{30} N(N + 1)(2N + 1)(3N^2 + 3N - 1)$$

γ n'apparaît que via Ω . Pour $\gamma = 0$, $\Omega = 0$. Pour $\gamma = \infty$, $\Omega = 1$.

Pour $\gamma = 0$ (c'est-à-dire $\lambda = \infty$), seule la volatilité du trend apparaît dans la fonction de coût. On pourrait imaginer que le résultat est le même que ROLUFdd, puisque dans les deux cas la fonction de coût minimise la volatilité du trend mesurée par la variance des différences de différences. Tel ne semble pas être le cas. Cette différence ne peut être due qu'au fait que dans un cas la minimisation est réalisée sur un coude et dans l'autre sur une marche d'escalier. Ceci illustre qu'il n'est pas indifférent sur quelle série la minimisation est réalisée.

Pour $\gamma = \infty$, c'est la minimisation de (carré de) la somme des gaps qui importe. Ceci n'implique pas que le trend soit égal à la série sous-jacente, contrairement à ce qui est le cas pour la fonction de coût de HP quand $\gamma = \infty$.

La figure suivante montre Ω en fonction de γ :



Dès que γ s'écarte un peu de zéro, Ω converge rapidement vers 1 (sa valeur correspondant à $\gamma = \infty$).

Annexe IV : MHP

MHP minimise une fonction de coût identique à celle de HP, sauf que le smoothing parameter prend des valeurs différentes aux extrémités (pour compenser le fait que les termes pénalisant la volatilité du trend apparaissent dans HP moins fréquemment aux extrémités qu'au centre de la série) :

$$\min_{\tau} \left\{ \sum_{t=0}^{N+1} \frac{1}{\lambda_t} (x_t - \tau_t)^2 + \sum_{t=1}^N [(\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1})]^2 \right\}$$

où

- $\lambda_t = \lambda$ pour $t = T - N + 3$ à $T - 2$
- $\lambda_t = \frac{3}{2}\lambda$ pour $t = T - N + 2$ et $t = T - 1$
- $\lambda_t = 3\lambda$ pour $t = T - N + 1$ et $t = T$

Il s'agit d'une optimisation ex-post (et non pas en application récursive)

MHP est décrit plus en détail dans Bruchez (2003), « [A modification of the HP Filter aiming at reducing the end point bias](#) » et un add-in Excel est disponible ([lien](#))

Cas $\lambda = \infty$

Nous calculons ici le cas où $\lambda = \infty$. Il s'agit donc de minimiser

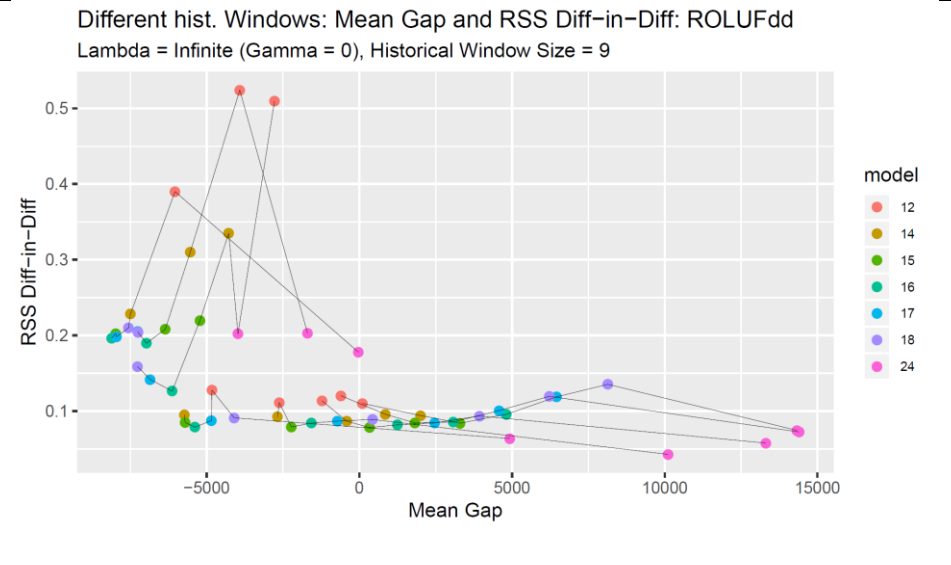
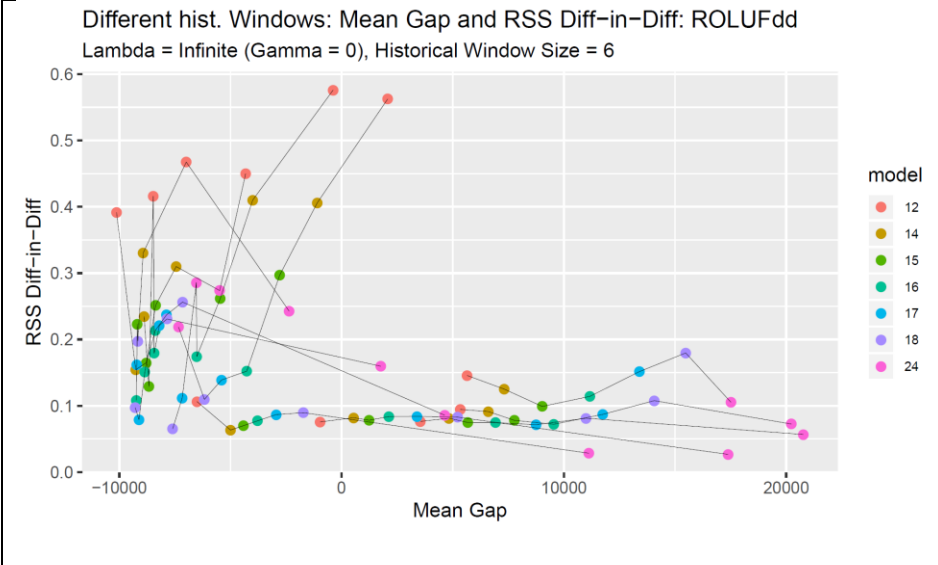
$$\min_{\tau} \left\{ \sum_{t=1}^N [(\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1})]^2 \right\}$$

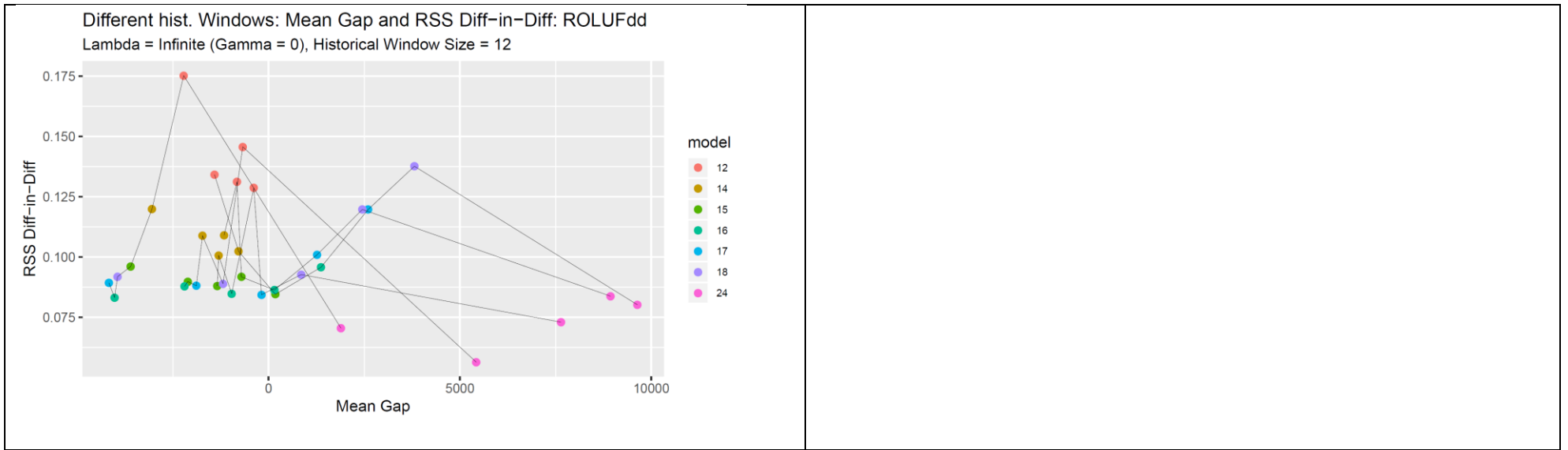
La solution est naturellement une droite. Avec la disparition de la première composante de la fonction de coût, c'est aussi le lien entre le trend et la série sous-jacente qui a disparu. Pour rétablir ce lien, considérons un λ extrêmement élevé, mais fini. Comme nous savons que la solution sera une droite, nous ne considérerons que des droites. Ceci implique que la seconde composante de la fonction de coût est exactement nulle. Il s'agit donc de trouver la droite τ_t qui minimise

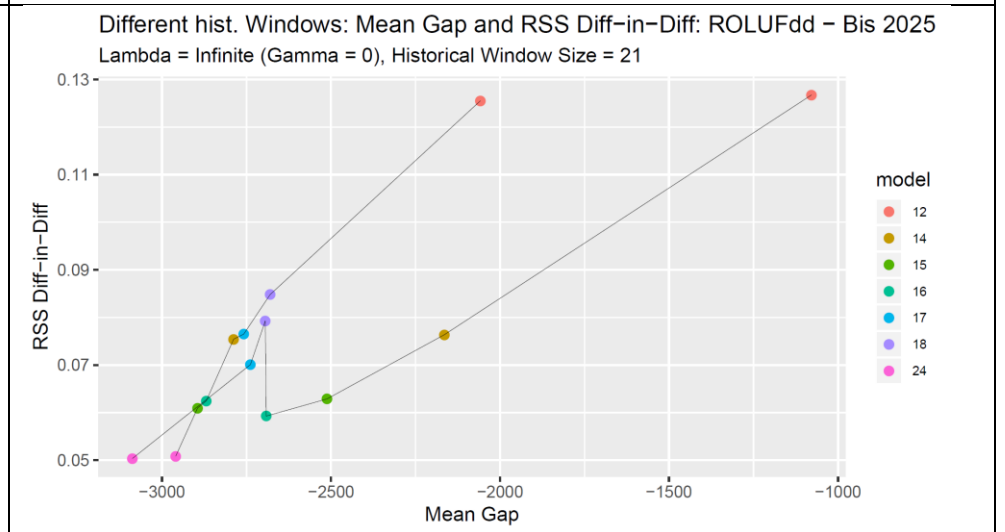
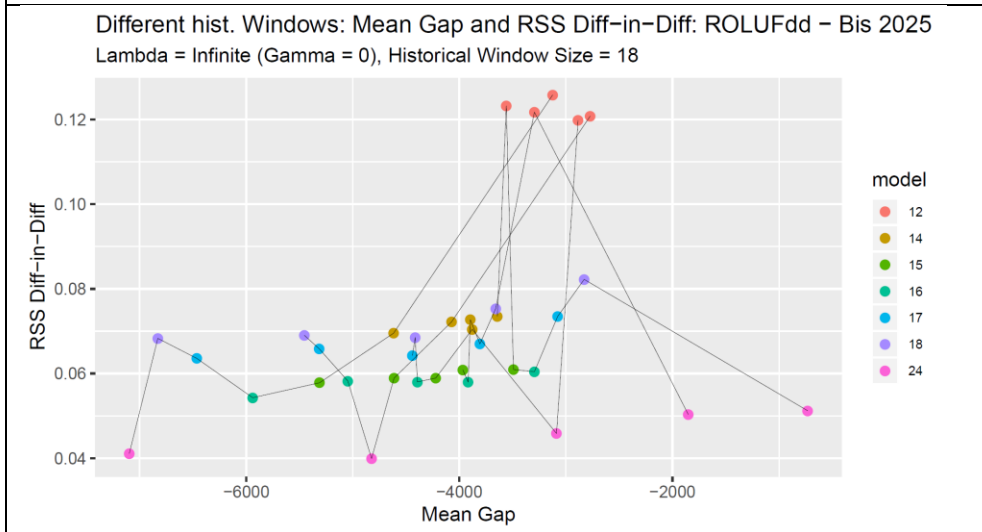
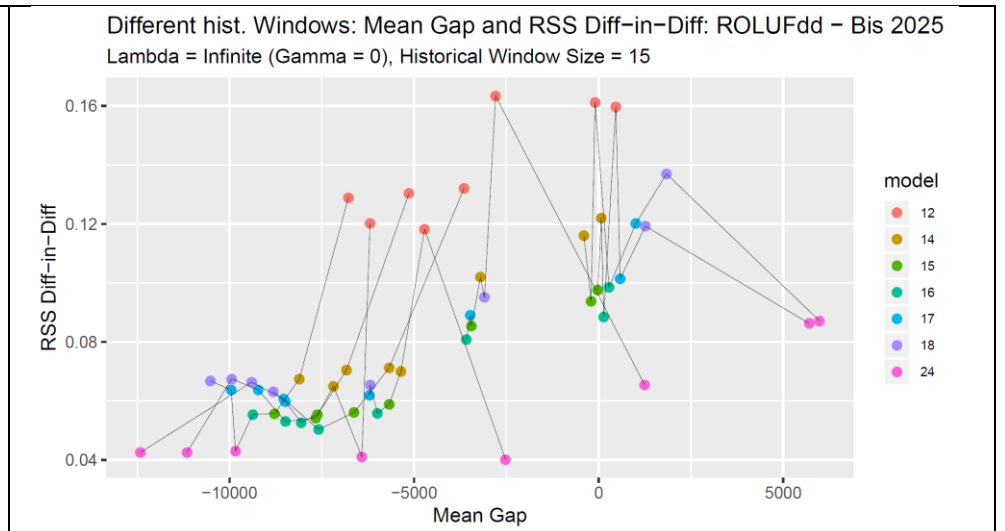
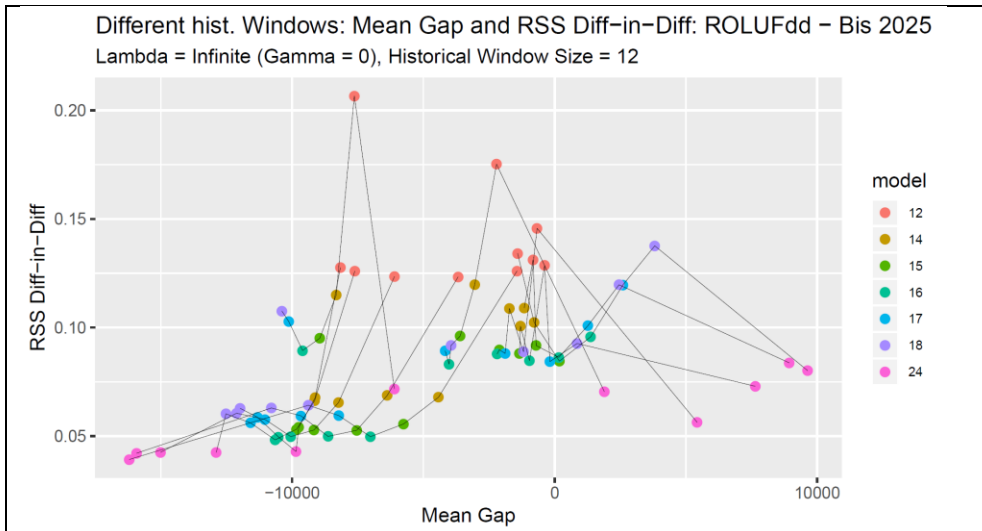
$$\min_{\tau} \left\{ \sum_{t=0}^{N+1} \frac{1}{\lambda_t} (x_t - \tau_t)^2 \right\} = \min_{\tau} \left\{ \sum_{t=0}^{N+1} \frac{\lambda}{\lambda_t} (x_t - \tau_t)^2 \right\}$$

Si λ_t était indépendant de t (comme pour HP), alors la solution serait la droite des moindres carrés. Dans notre cas, c'est simplement la droite des moindres carrés pondérés (avec $\frac{\lambda}{\lambda_t}$ comme pondération).

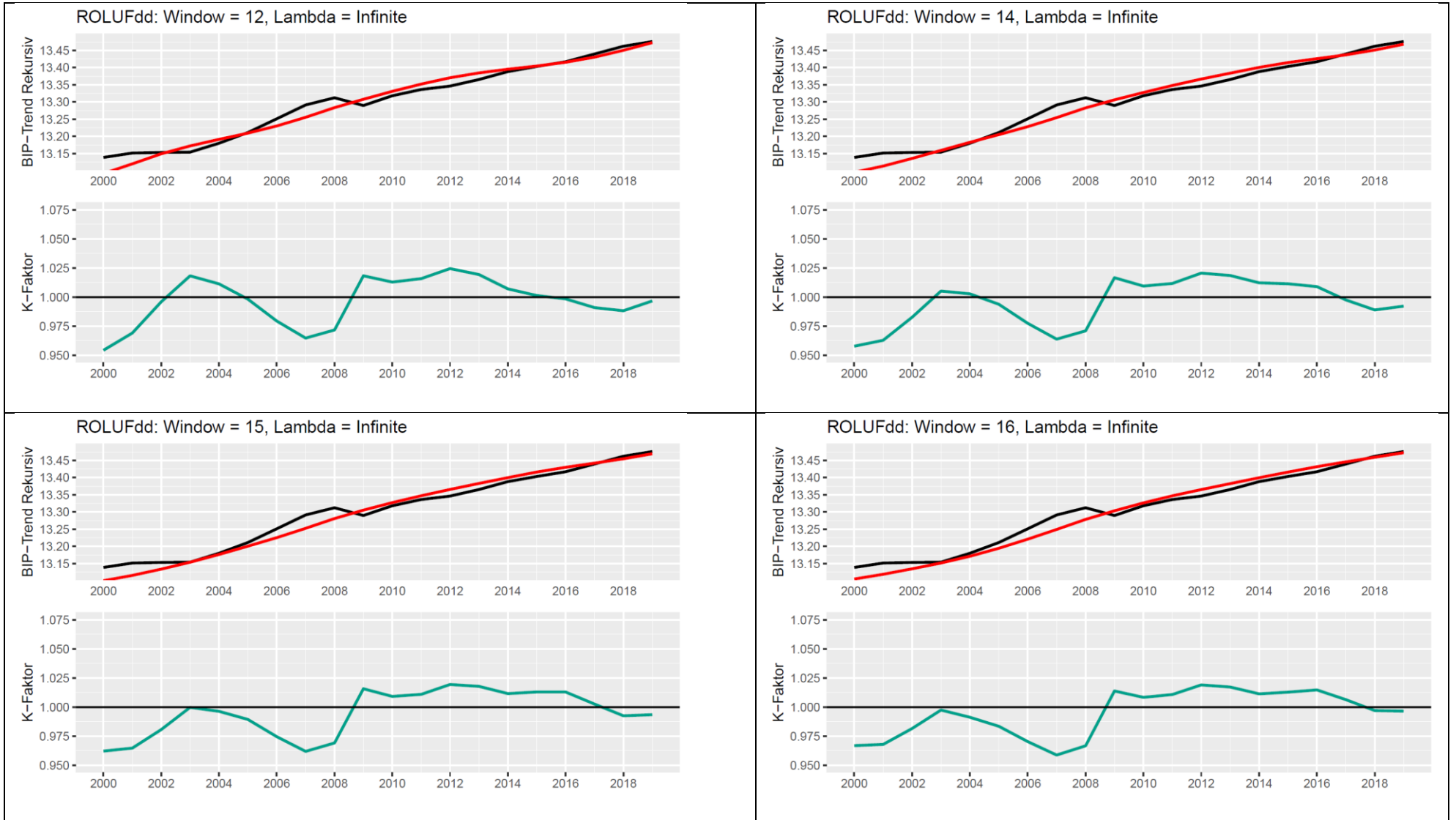
Annexe V : Graphs en complément de ceux fournis au §4

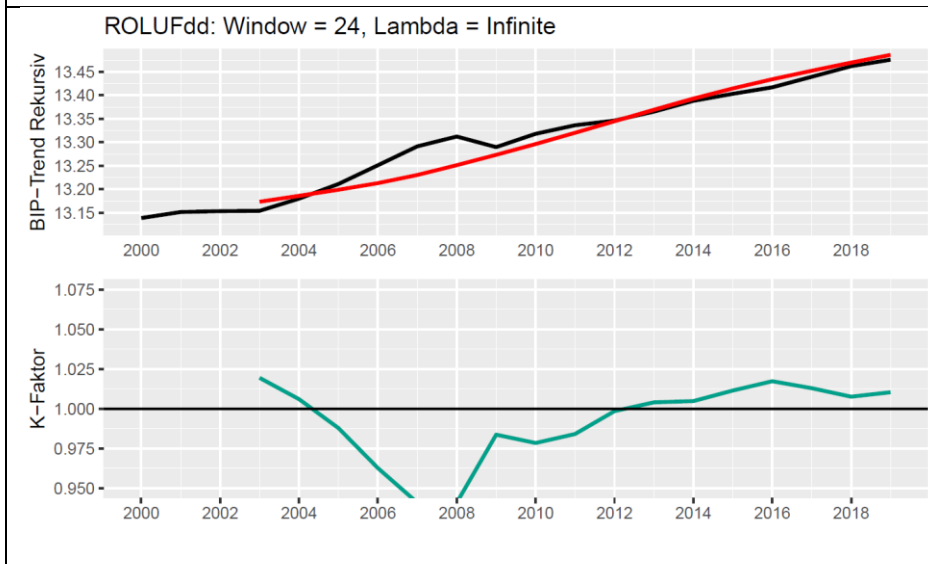
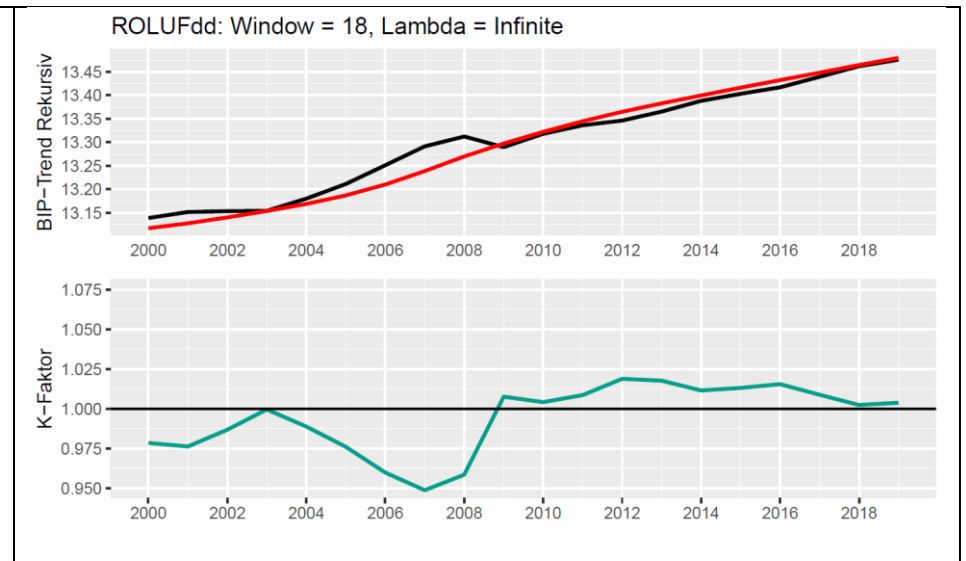
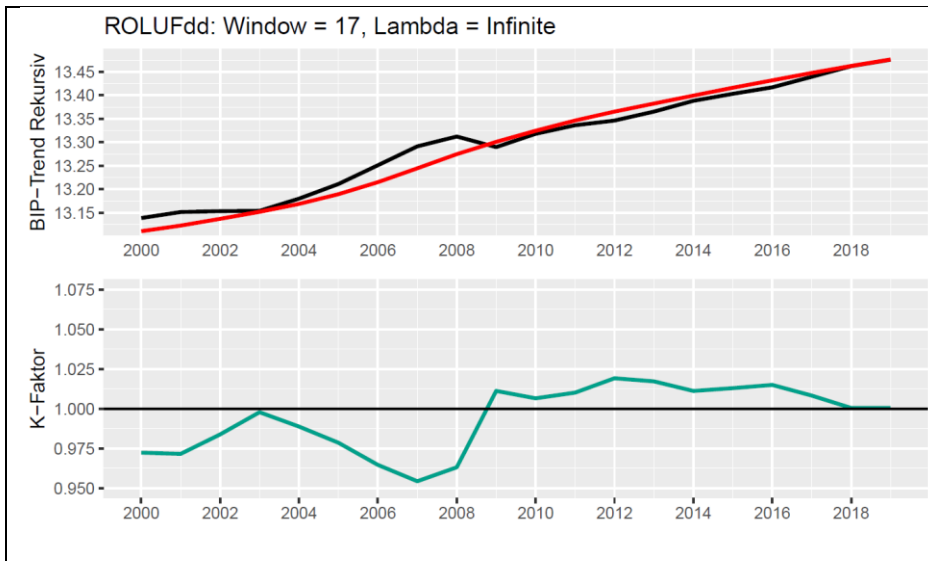




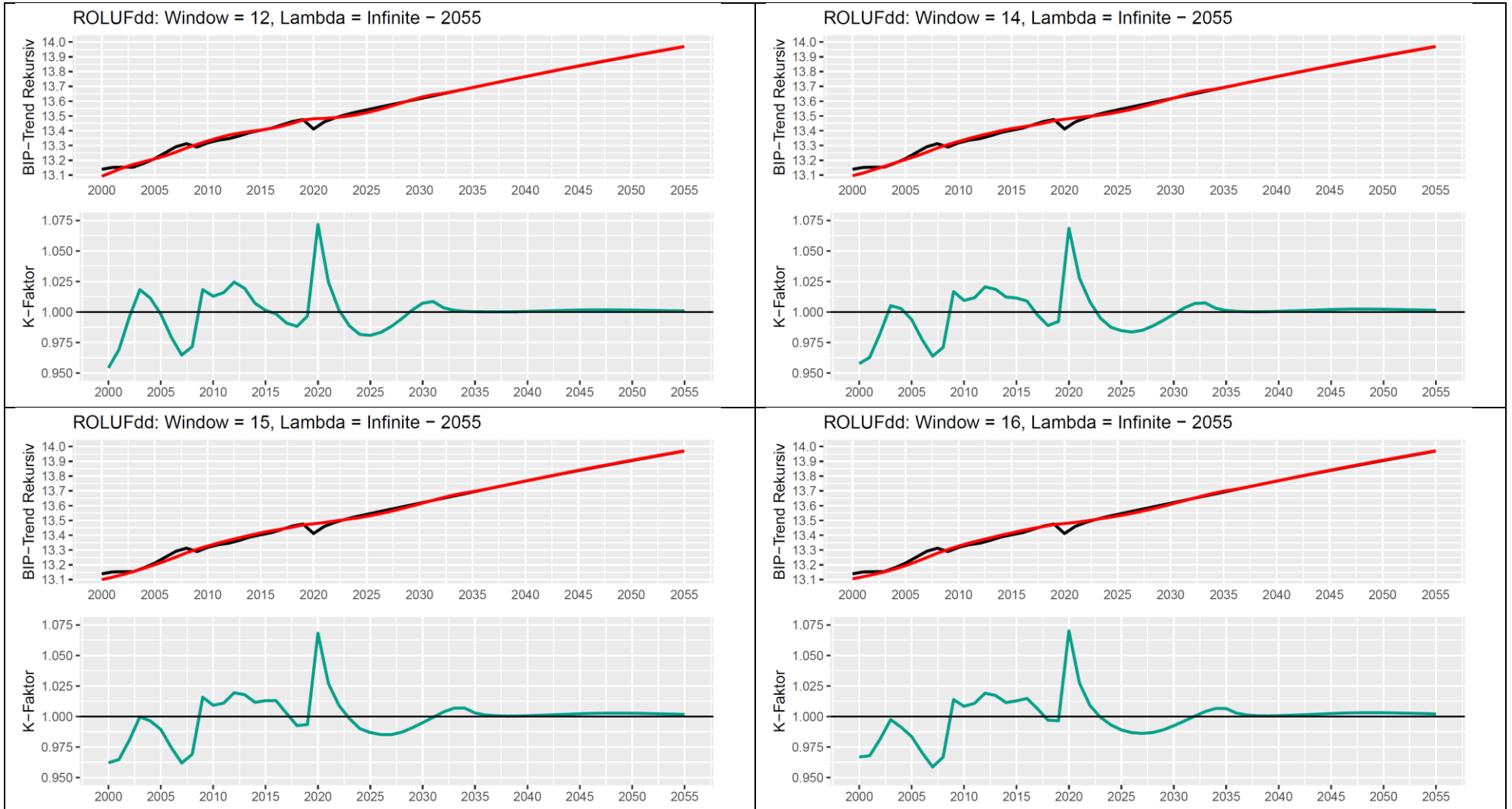


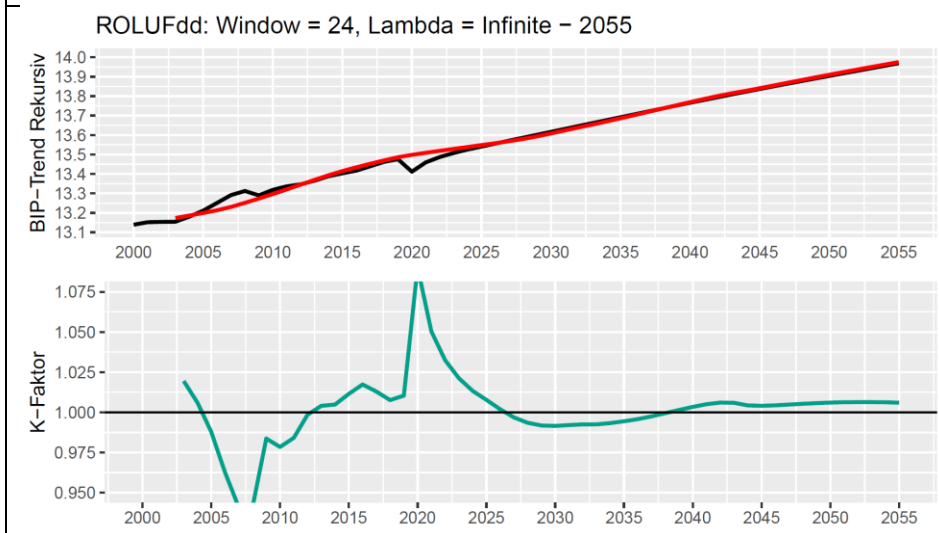
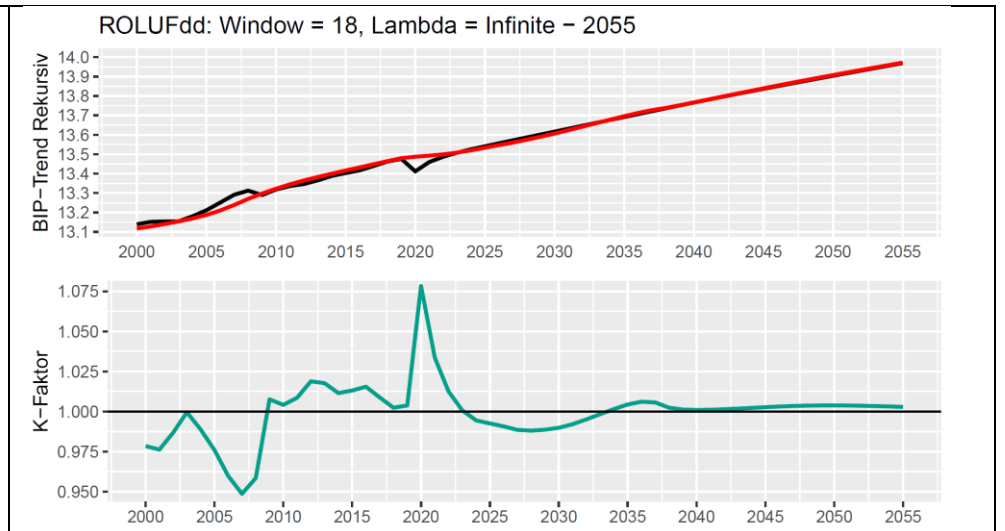
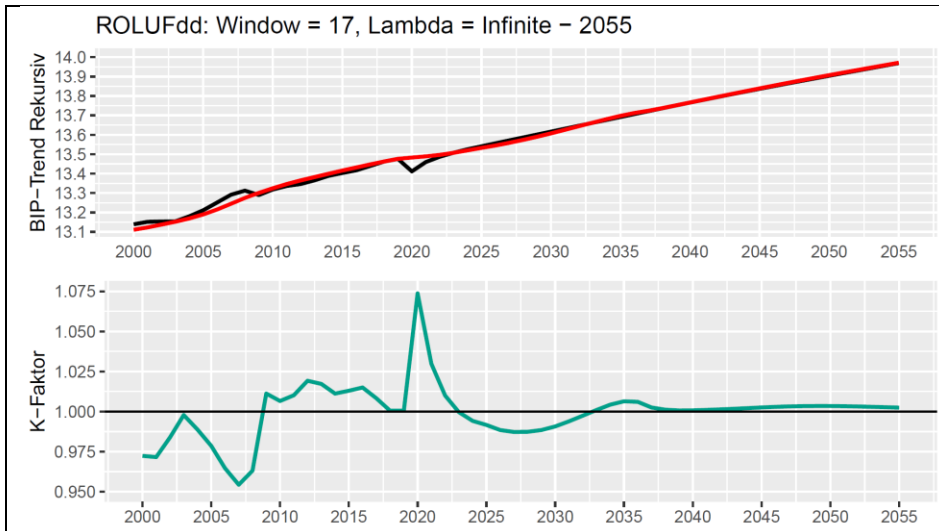
ROLUFdd jusqu'en 2019



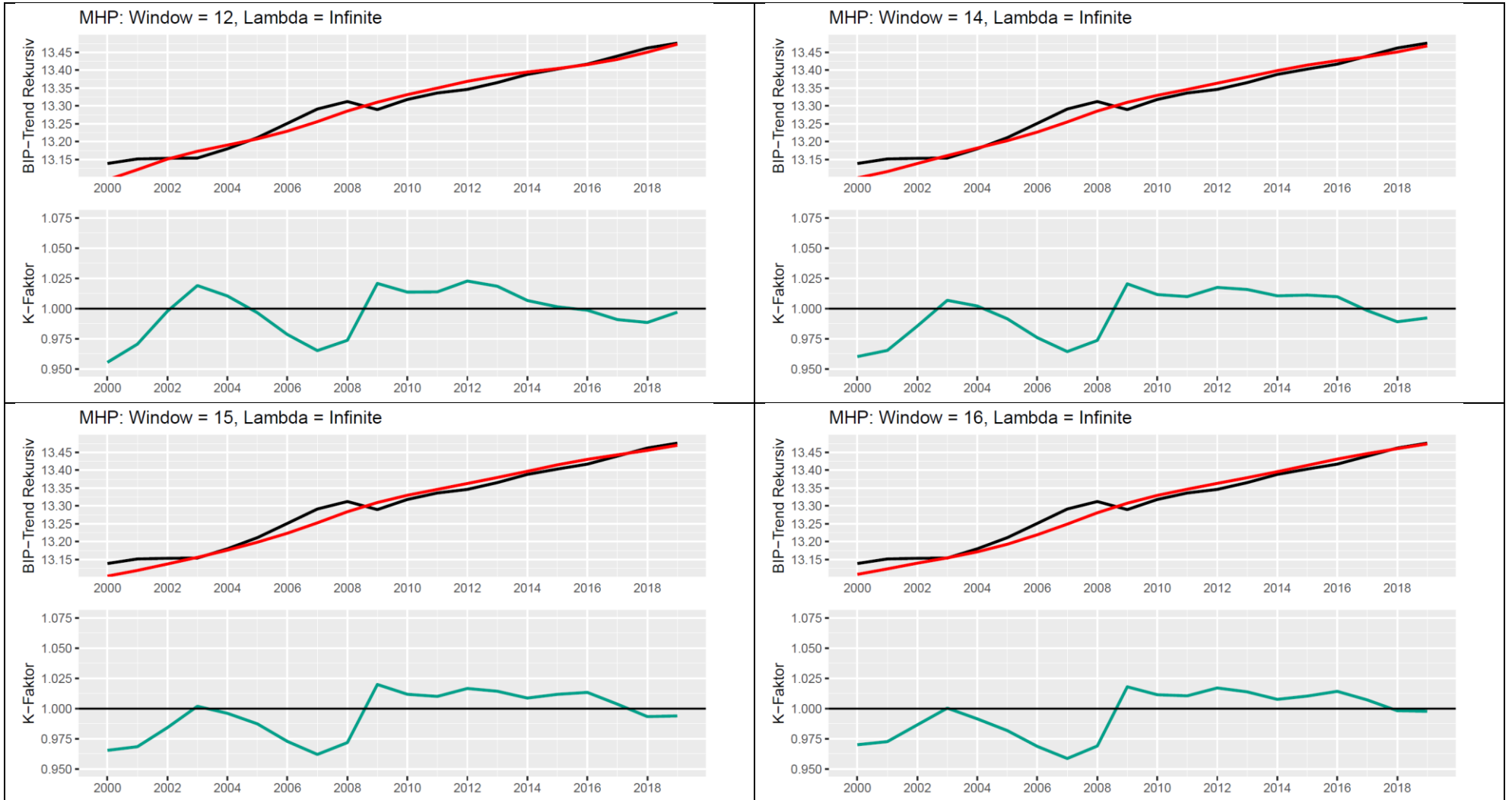


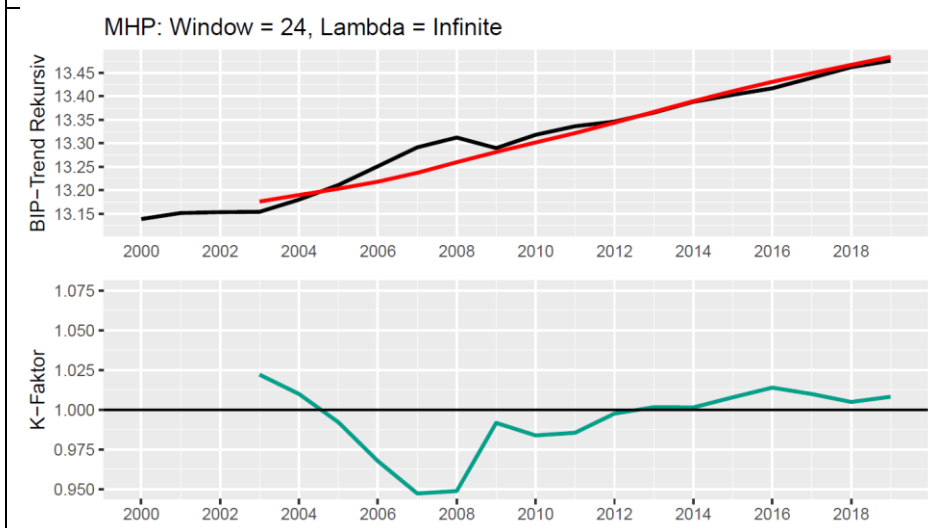
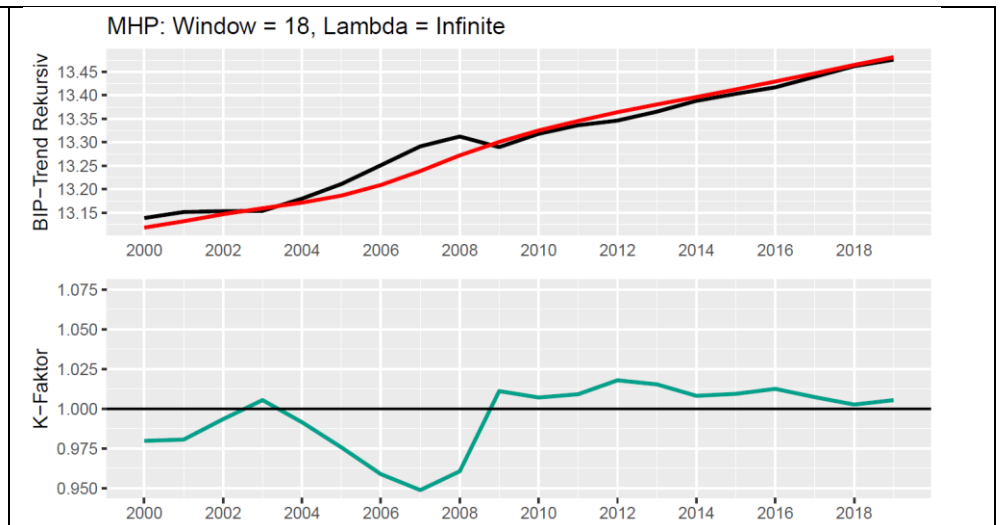
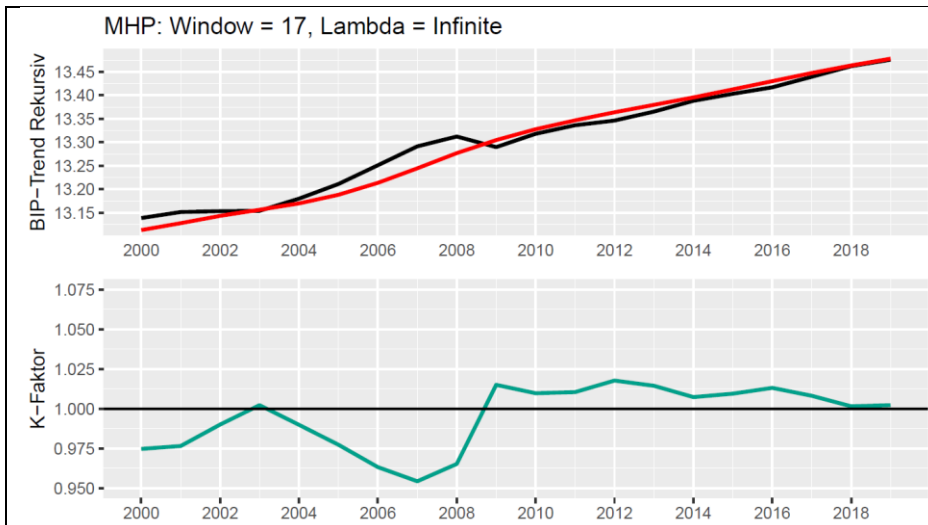
ROLUFdd jusqu'en 2055





MHP ($\lambda = \infty$) jusqu'en 2019





ROLUFdd: RSS-Diff-in-Diff and Mean Gap - 2055
Different Windows, Triangles show Lambda = Infinite (Gamma = 0)

